Vilniaus universitetas

Informatikos ir informatinio mąstymo mokomoji veikla

Tinklų algoritmai. Žaidybinės veiklos viduriniam ugdymui

Mokyklos pedagogika

Informatikos ir informatinio mąstymo mokomosios veiklos sukurtos įgyvendinant projektą „Aukštųjų mokyklų tinklo optimizavimas ir studijų kokybės gerinimas Šiaulių universitetą prijungiant prie Vilniaus universiteto“ (Nr. 09.3.1-ESFA-V-738-03-0001), finansuojamą iš Europos socialinio fondo lėšų pagal 2014–2020 metų Europos Sąjungos fondų investicijų veiksmų programos 9 prioriteto „Visuomenės švietimas ir žmogiškųjų išteklių potencialo didinimas“ įgyvendinimo priemonę Nr. 09.3.1-ESFA-V-738 „Aukštųjų mokyklų tinklo tobulinimas“.

Metodinė medžiaga „Tinklų algoritmai. Žaidybinės veiklos viduriniam ugdymui“ skirta Mokyklos pedagogikos studijų programos moduliui „Informatikos didaktika“. Tikslinė grupė – būsimi informatikos pagrindinio ugdymo mokytojai. Medžiaga siejasi su informatikos ir matematikos Bendrosiomis programomis, algoritmų ir programavimo pasiekimų sritimi. Atlikdami veikloje numatytas užduotis studentai, būsimieji mokytojai, išsiaiškins, kokias gyvenimiškas problemas sprendžiant taikomas teksto kodavimas ir glaudinimas. Pateikiamas teorinis temos pagrindimas būsimam mokytojui, aptariamos pagrindinės srities sąvokos.

Veiklą parengė: dr. Vaidas Giedrimas

Redagavo: Viktoras Dagys

Vilnius, 2022

Tikslas

Susipažinti su grafais bei algoritmais jiems apdoroti.

Ryšys su bendrosiomis programomis

Informatika: Duomenų vaizdavimas

Informacinės technologijos: Piešimas Kompiuteriu, Duomenų apdorojimas ir pateikimas skaičiuokle

Integracija su matematika: Matematinis mąstymas, Problemų sprendimas

Tinklų protokolai

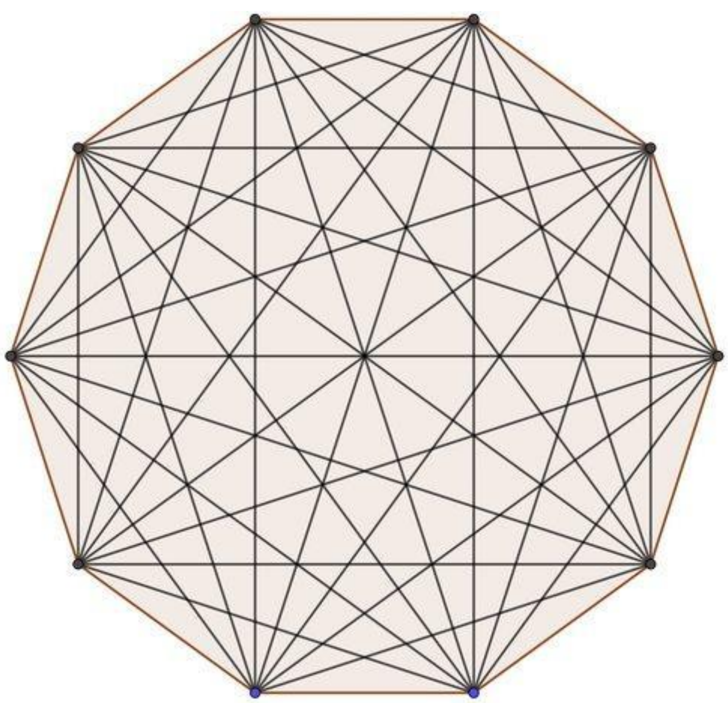
Pagrindinės sąvokos

Nagrinėdami grafus sakėme, kad dalis jų viršūnių yra sujungtos tarpusavyje, tačiau nekėlėme kokių nors specifinių apribojimų toms jungtims. Dabar panagrinėkime jungiuosius (be salų) grafus, kurie inžinerijoje dar vadinami **tinklais**. Jei tinklas neturi ciklų (t. y., eidami iš kurios nors viršūnės skirtingais lankais negalime grįžti į ją pačią), tai jis vadinamas **medžiu** arba **pografiu**. Tokiuose tinkluose lankai turi kryptį ir svorį (maksimalų pralaidumą). Tinklais ir medžiais yra modeliuojamos telekomunikacijų, elektros tiekimo ir kitos sistemos.

1-oji veikla

Veikla siekiama pagrįsti minimalaus tinklo uždavinį, atskleisti, kaip greitai didėja viršūnių sujungimo išlaidos.

Kamštmedžio lentoje ratu susmeikite 10 smeigtukų. Tada jau kiekvieną smeigtuką sujunkite siūlu su visais likusiais. Išmatuokite, kiek siūlo sunaudojote. Dabar įbeskite 11-ąjį smeigtuką ir sujukite jį su visais likusiais. Kiek papildomai siūlo sunaudojote? Nuosekliai didinkite smeigtukų skaičių iki 20 ir fiksuokite siūlo sąnaudas. Ar pavyko pabaigti eksperimentą?



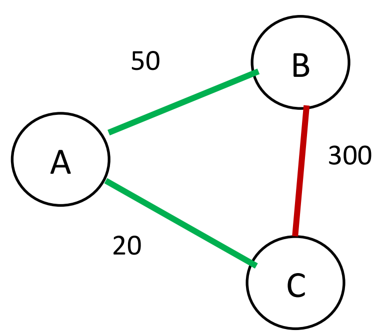
1 pav. Grafo pavyzdys

Minimalaus tinklo uždavinys

Popieriaus lape viršūnes pieštuku galime sujungti labai lengvai, todėl nupiešti tinklą, kuriame kiekvienos dvi viršūnės būtų sujungtos tarpusavyje (visos su visomis) galite palyginti greitai. O jei viršūnių būtų 50? 100? Tuomet pradėtume galvoti, ar tikrai būtina sujungti jas visas? Galbūt užtenka sujungti tik kas antrą ir pan. Taip yra ir inžinerijoje. Jei kiekvieną miestą ar kaimelį jungtų tiesioginis kelią, būtų patogu, tačiau tokio kiekio kelių tiesimas reikalautų daug lėšų, be to laukai, kurie gali būti naudojami žemės ūkiui ar kitoms reikmėms, būtų panaudoti keliui tiesti. Tai būtų neefektyvu. Praktikoje kelias tiesiamas per keletą miestų ir kaimų, kad visi jais galėtų naudotis. Netgi aviakompanijos kartais siūlo skrydžius su tarpinėmis stotelėmis, kai lėktuvas leidžiasi ne tik pasipildyti kuro atsargų, bet ir išlaipinti bei paimti keleivių (pavyzdys: TK730 Stambulas (TR)–Malė (MV)–Kolombas (LK)).

Jeigu sujungti visas viršūnes yra per brangu, tada kyla klausimas kiek ir kokių jungčių pakanka, kad iš kiekvienos viršūnės būtų galima pasiekti bet kurią kitą, kad ir netiesioginiu keliu.

Kai lankai turi svorius, tada svarbu vertinti ir juos. Pavyzdžiui, jei norime užtikrinti susisiekimą tarp miestų A B ir C (2 pav.), pakanka naudoti lankus A–B ir A–C. Lanką C–B naudoti netikslinga (galbūt tarp B ir C stūkso kalnas, kurį įveikti prireiks didesnių (300) sąnaudų), nes aplinkinis kelias C–A–B yra kelis kartus pigesnis.



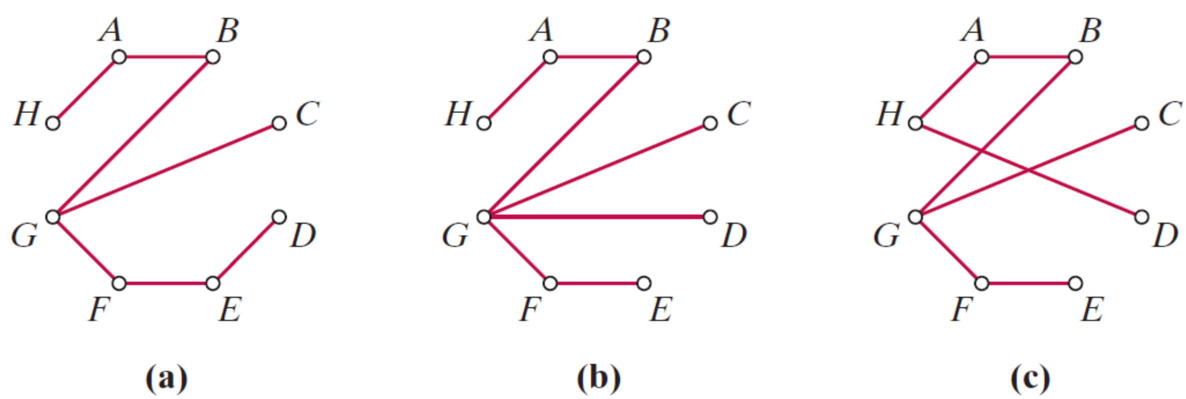
2 pav. Paprastas tinklas, kuriame srauto dar nėra

Minimalūs jungiamieji medžiai

Jungiamuoju medžiu vadinamas **pografis**, jungiantis visas grafo viršūnes. Kitaip sakant atsisakome dalies lankų ir vis vien viršūnės lieka sujungtos. Jei kyla klausimas kiek tų lankų reikėtų palikti, prisiminkime medžio savybes:

- Jungiamajame medyje bet kurias dvi viršūnes jungia tik vienas kelias, ciklų nėra;
- Visi medžio lankai yra tiltai, t. y., jei tokį lanką panaikintume, sukurtume su grafu nebesujungtą salą;
- Jei medyje yra N viršūnių, tai jame turi būti N-1 lankų.

Grafo pagrindu sudarant jungiamąjį medį, galima rasti keletą skirtingų sprendinių (pvz. 3 pav.). Kuris iš jų yra geriausias? Atsakymas į klausimą priklauso nuo to, ar lankai turi svorius, ar ne. Nesant svorių visi sprendiniai yra lygiaverčiai, o jei grafas svorinis – sprendžiame minimalaus jungiamojo medžio uždavinį.



3 pav. Alternatyvūs jungiamieji medžiai

Kruskalo algoritmas

4 pav. Džozefas Kruskalas

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kruskal_Joseph/Kruskal_Joseph.jpeg

Minimalaus jungiamojo medžio uždaviniui spręsti dažniausiai yra naudojamas algoritmas, kurį 1956 m. aprašė amerikietis matematikas Džozefas Kruskalas (Joseph Kruskal):

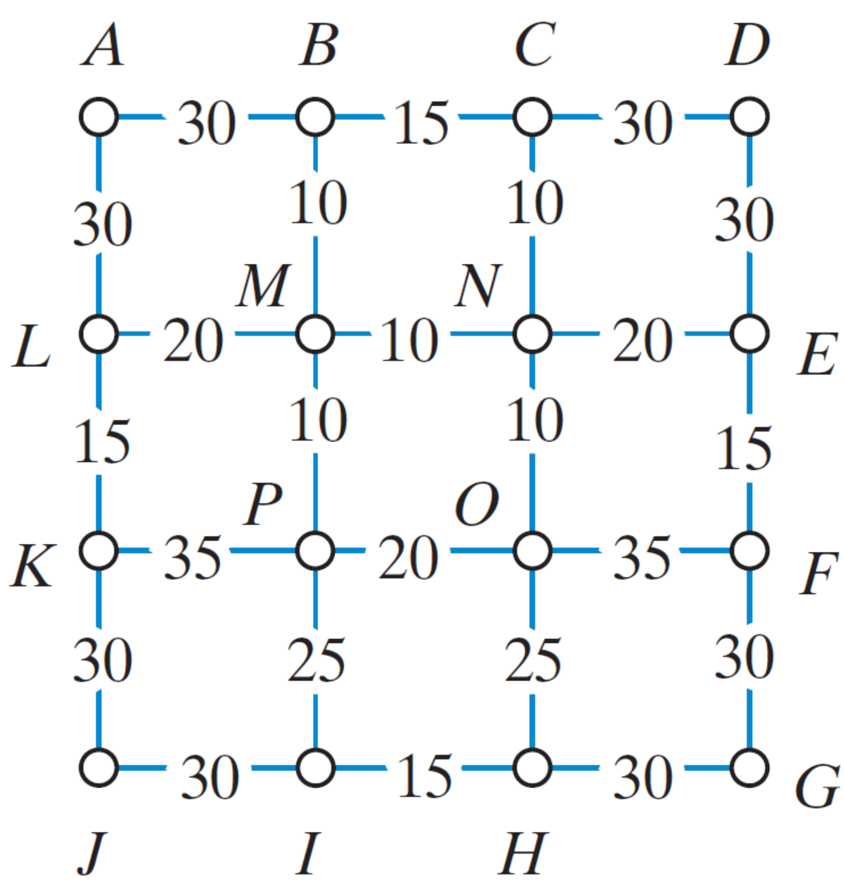
1. Randame pigiausią lanką visame grafe ir jį pažymime;
2. Randame ir pažymime kitą pigiausią dar nepažymėtą ir neuždarantį ciklo lanką;
3. Kartojame 2-ąjį žingsnį tol, kol pažymėtais lankais bus sujungtos visos viršūnės.

Pastebėtina, kad paskutiniame žingsnyje galima naudoti ir šiek tiek kitokią baigties sąlygą. Prisiminus, kad esant N viršūnių, lankų turi būti ne daugiau kaip N-1, galime tiesiog skaičiuoti pažymėtus lankus, ir sustoti ties N-1 imtinai.

Algoritmas yra optimalus, t. y., jį naudojant visada gaunamas pigiausias medis. Be to algoritmas yra efektyvus – tinka naudoti ir esant didesniam viršūnių skaičiui.

2-veikla

Atidžiai išnagrinėkite Kruskalo algoritmą ir atlikite jį su šio grafu:



1-oji užduotis

Pabandykite įsivaizduoti, kad jums reikia ne minimalaus jungiamojo medžio, o maksimalaus. Pavyzdžiui, kompiuteriniame žaidime reikia apeiti tam tikrus patikros punktus „brangiausiais“ keliais ir surinkti kuo daugiau taškų. Ar tuomet irgi būtų galima taikyti Kruskalo algoritmą (tik pakoreguotą taip, kad ieškotume ne pigiausios, o brangiausios jungties)?

Boruvkos algoritmas

Panašiu metu kaip J. Kruskalas, problemą nagrinėjo ir kiti mokslininkai: R. K. Primas (JAV), V. Jarnikas ir O. Boruvka (Čekija).

Otakaras Boruvka pateikia tokį algoritmą:

1. Naudojamas medžių sąrašas, kurį iš pradžių sudaro tiek medžių, kiek yra viršūnių (t. y. N). Kiekvieną medį sudaro tik viena (kiekvienam kita) grafo viršūnė.
2. Paeiliui nagrinėjami visi medžiai. Kiekvienam jų randama ir jame pažymima (įtraukiama) pigiausia į medį ateinanti, tačiau medžiui dar nepriklausanti briauna.
3. Jei keliems medžiams buvo parinkta ta pati pigiausia briauna, tai tie medžiai sujungiami.
4. 2–3 žingsniai kartojami tol, kol lieka tik vienas medis. Jis ir bus minimalusis jungiamasis medis.

2-oji užduotis

Grafe, kuriame ieškojote minimalusis jungiamojo medžio Kruskalo algoritmu, atlikite tokio medžio paiešką Boruvkos algoritmu. Ar abu sprendiniai sutampa?

Trumpiausio tinklo paieškos algoritmas

Nagrinėtuose pavyzdžiuose rėmėmės prielaida, kad lankai (keliai, upės, vamzdžiai) jau yra. Kruskalo algoritmas garantuoja optimalų sprendinį jame, tačiau netikrina, ar lankai nutiesti teisingai.

Jei planuotume naują tinklą (pvz., interneto ryšio), žinotume tikslias taškų vietas, tačiau lankus galėtume formuoti laisvai. Maža to, galėtume įtraukti ir papildomų viršūnių. Kai kuriais atvejais galime gauti dar pigesnį tinklą. Kyla klausimas, kaip sužinoti, koks tas pigiausias tinklas, kokius lankus naudoti, kokias viršūnes (ir kada) įtraukti.

Bendruoju atveju trumpiausias tinklas, jungiantis viršūnes yra vienas iš dviejų:

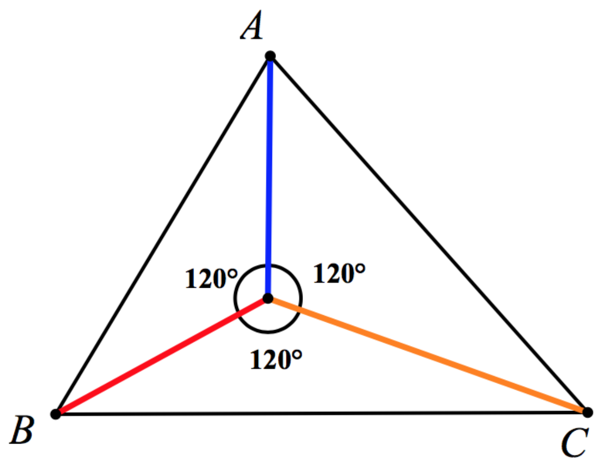
1. Minimalus jungiantysis medis (apie jį ką tik kalbėjome);
2. Šteinerio medis.

Taigi, jei nesame tikri, kad minimalus jungiantysis medis yra geriausias variantas, bandykime formuoti Šteinerio medį ir skaičiuoti ar jis yra geresnis. Šteinerio medis formuojamas, nagrinėjant viršūnes po tris ir, jeigu reikia, tarp jų sukuriant ketvirtąją viršūnę, dar vadinamą **Šteinerio tašku**. Čia minimas Jokūbas Šteineris buvo šveicaras matematikas, XIX a. dirbęs geometrijos srityje.

5 pav. Jokūbas Šteineris

https://en.wikipedia.org/wiki/Jakob_Steiner#/media/File:JakobSteiner.jpg

Imkime tris viršūnes (arba taškus) ir įsivaizduokime, kad jie yra sujungti į trikampį. Jei vienas iš trikampio kampų yra didesnis nei 120°, tai Šteinerio taško kurti nereikia, nes trumpiausias tinklas tarp šių viršūnių sutaps su minimaliu jungiančiuoju medžiu (kurį jau mokame surasti). Jei visi kampai lygūs ar mažesni už 120°, tada Šteinerio taškas dedamas trikampio viduje taip, kad jį ir trikampio viršūnes jungiančios atkarpos sudarytų 120° kampus (6 pav.). Jei nėra kokių nors ypatingų aplinkybių (reljefo skirtumai, valstybių sienos ir pan.), gautų atkarpų (spalvotųjų, žr. 6 pav.) svorių suma yra mažesnė už dviejų kraštinių svorių sumą.



6 pav. Šteinerio taškas

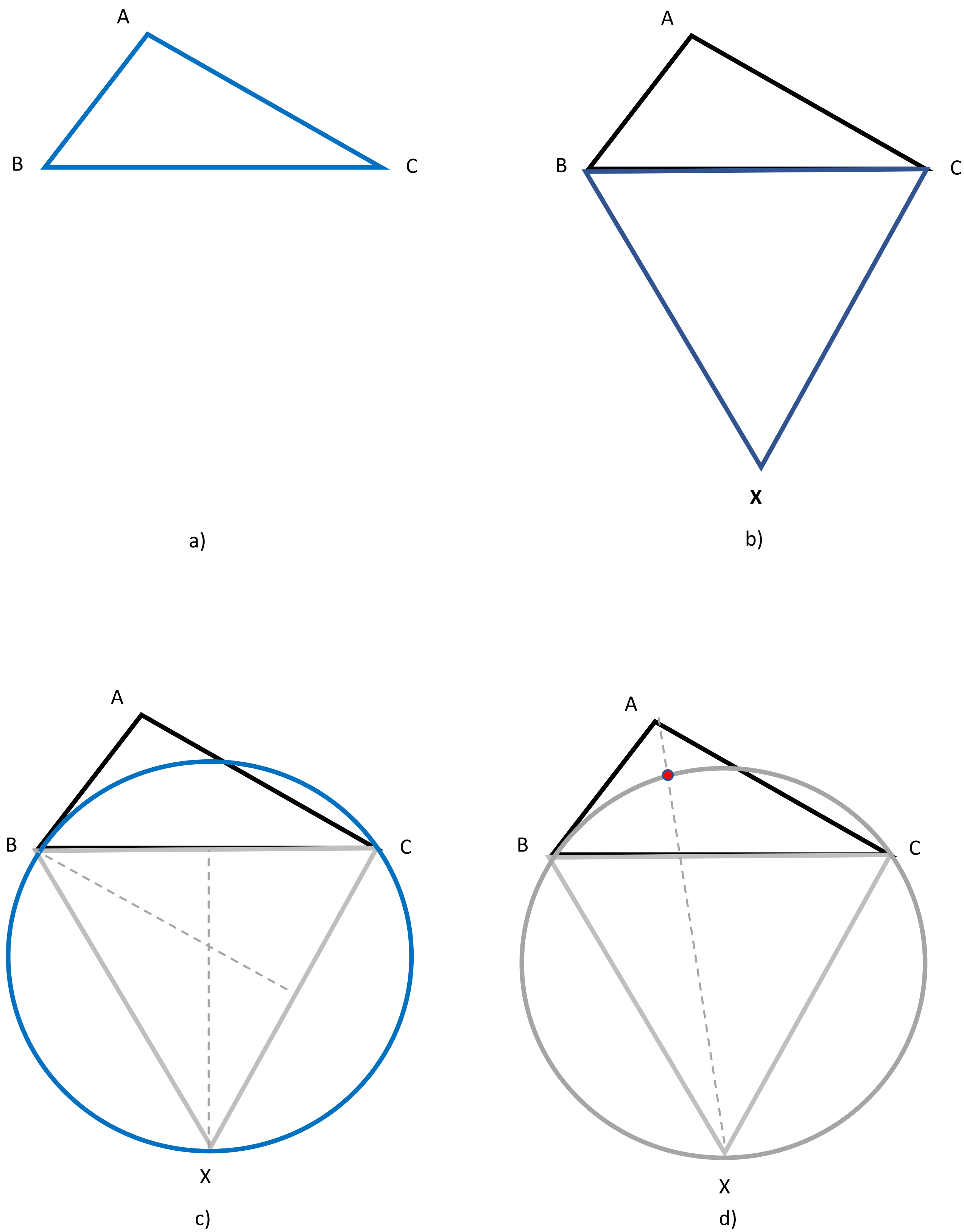
https://ocf.berkeley.edu/~ugradsa/static/usa_website/images/blog/rp/spring_2018/SteinerTreeProblem/fig6.png

„Iš akies“ rasti Šteinerio tašką gali būti sunku, todėl geometrijoje jo ieškoma taikant vadinamąją Toričelio[1] procedūrą:

1. Tarkime, turime trikampį su viršūnėmis A, B ir C. Šalia jo nubraižykime lygiakraštį trikampį BCX (čia X – nauja viršūnė). Praktiškai tašką X galima rasti skriestuvu nubrėžus du puslankius iš taškų B ir C, kurių ilgis sutaptų su atkarpos BC ilgiu (7b pav.);
2. Aplink BCX trikampį nubraižykime apskritimą: trikampio kraštinę dalinkime per pusę ir iš gauto taško brėžkime statinį; dviejų statinių susikirtimo taškas bus apskritimo centras, o atstumas nuo jo iki bet kurios viršūnės – jo spindulys (7c pav.);
3. Taškus X ir A sujunkime atkarpa. Taškas, kuriame atkarpa kerta skritulį ir bus Šteinerio taškas (7d pav.).

Dirbant su trimis viršūnėmis Šteinerio taško paieška atrodo lengva, tačiau visame grafe tokių trejetų ir vidinių taškų paieška gali būti problematiška. Kodėl? Jei turime keletą taškų, minimalių jungiančiųjų medžių yra geriausiu atveju keli (dažniausiai 1). Tačiau galimų Šteinerio medžių skaičius daug didesnis. Vidinių taškų koordinatės labai priklauso nuo to, kokia tvarka nagrinėsime viršūnių trejetus. Pavyzdžiui, jei turime 7 viršūnes, tai įvairių Šteinerio medžių galime sukurti tūkstančius, o jei 10 – milijonus.

[1] E. Toričelis yra italų mokslininkas, labiau žinomas dėl savo eksperimentų fizikos, visų pirma skysčių dinamikos srityje.

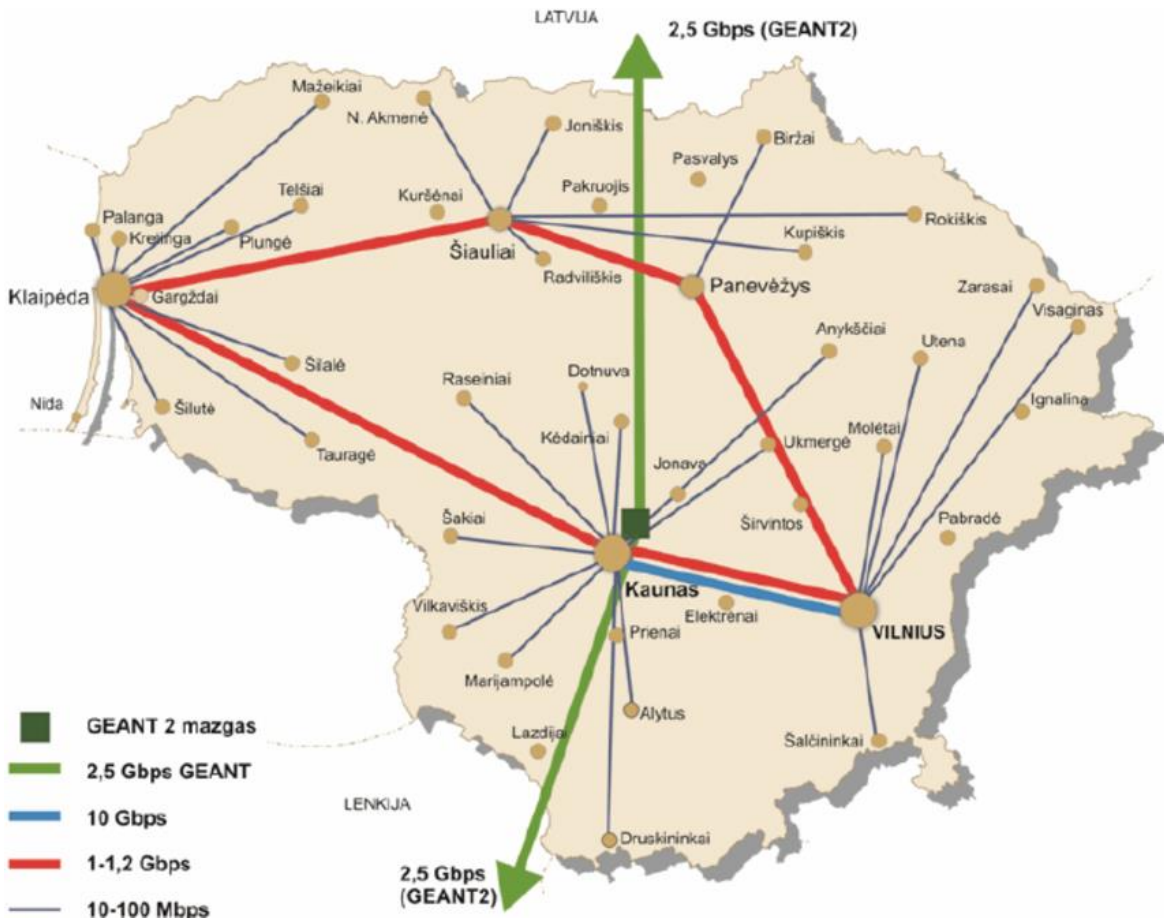


7 pav. Šteinerio taško paieškos procedūra

Pabaigai reikia nepamiršti matematiškai įrodyto fakto, jog minimalus jungiantysis medis ir trumpiausias kelias niekada nesiskiria daugiau nei 13,4 proc. Taigi, jeigu tokia paklaida leistina, visiškai pakanka taikyti Kruskalo algoritmą esamiems lankams ir neieškoti tarpinių viršūnių.

3-oji veikla

Panagrinėkite schemą, kurioje pavaizduotas „LitNet“ tinklas, ir nustatykite, kaip jį būtų galima optimizuoti sukuriant Šteinerio taškus. Žemėlapyje suraskite, kokios konkrečios vietovės (miestai, kaimai) ten yra.

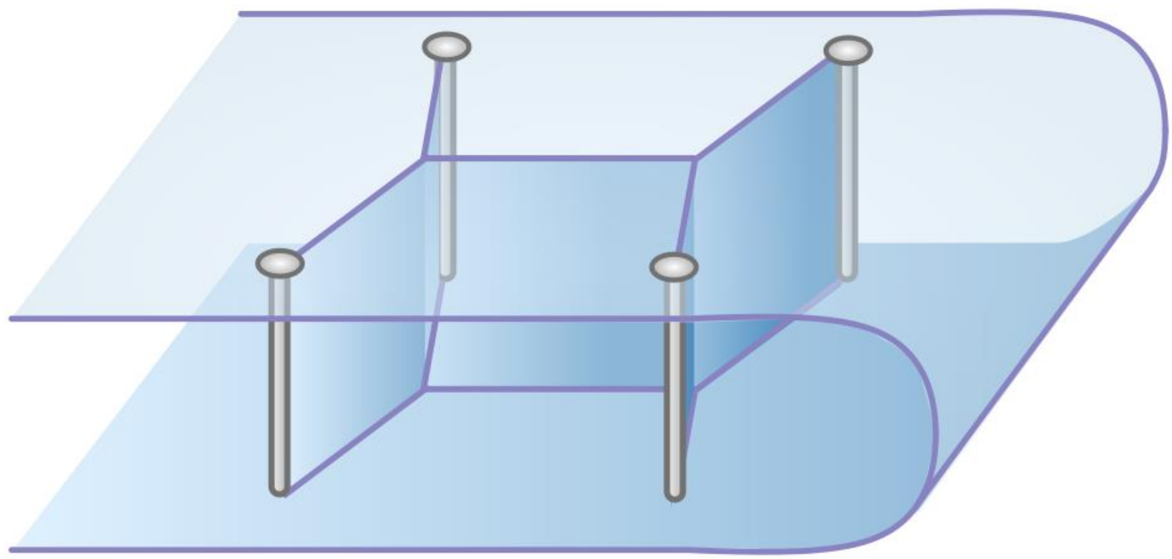


https://www.researchgate.net/profile/Airina-Volungeviciene/publication/289497447/figure/fig1/AS:314898312646656@1452089016588/LITNET-connections-between-major-Lithuanian-cities-2010.png

4-oji veikla

Veikla siekiama parodyti alternatyvų minimalaus tinklo ir Šteinerio taškų nustatymo būdą remiantis fizikos dėsniais („gamtiniu kompiuteriu“).

Popieriaus lape sužymėkime taškus, kuriuos norime sujungti. Rekomenduojama, kad taškai būtų nutolę vienas nuo kito ne mažiau kaip po 3 cm. Paimkime dvi organinio stiklo plokštes arba perlenkime vieną (8 pav.), padėkime jas ant popieriaus lapo ir tose vietose, kur buvome pažymėję viršūnes, įtvirtinkime metalinius arba plastikinius strypelius (galima išgręžti mažas skylutes, arba, jei medžiaga plonesnė, pasinaudoti yla). Tarp plokštelių turėtų būti apie 2–3 cm tarpas. Įmerkime prietaisą į muilo tirpalą. Jį ištraukus tarp strypelių pradės formuotis muilo burbulai.



8 pav. „Gamtinis kompiuteris” Šteinerio medžio paieškai

https://hapax.github.io/images/posts/steiner27.png

Tinklų uždavinių sprendimas kompiuteriu

Šteinerio medžių formavimo ir kitų grafų sudarymo algoritmus galima panagrinėti „VisualAlgo“ aplinkoje: https://visualgo.net/en

Daugiau minimalaus tinklo algoritmų pavyzdžių galima rasti ir „YouTube“ platformoje:

- https://www.youtube.com/watch?v=JZBQLXgSGfs&t=123s
- https://www.youtube.com/watch?v=jsmMtJpPnhU&t=327s
- https://www.youtube.com/watch?v=t92xyTDvl_c
- https://www.youtube.com/watch?v=Pl6rAOWu-Og

Šaltiniai

Tannenbaumas, P., Arnoldas, R. Kelionės į šiuolaikinę matematiką. Vilnius: TEV, 1995, 512 p.

Tannenbaum, P. Excursions in Modern Mathematics. Pearson, 2018, 596 p.

Petrauskas, L., Skūpienė, J. Informatikos olimpiados: algoritmai ir taikymo pavyzdžiai. Vilnius, 2006. https://siom.lmio.lt/m/t/knyga.pdf

Volungevičienė, A. Open Educational Resources in Lithuania: State of the art, Challenges and Prospects for Development, 2011. https://www.researchgate.net/publication/289497447_Open_Educational_Resources_in_Lithuania_State_of_the_art_Challenges_and_Prospects_for_Development

Wakeham, D. Steiner trees and soap bubbles. 2020. https://hapax.github.io/assets/2020-03-11-steiner/