



**Vilniaus
universitetas**

Informatikos ir informatinio mąstymo mokomoji veikla

Minimalūs jungiamieji medžiai

Mokyklos pedagogika



Kuriame
Lietuvos ateitį
2014–2020 metų
Europos Sąjungos
fondų investicijų
veiksmų programa



**Vilniaus
universitetas**

Informatikos ir informatinio mąstymo mokomosios veiklos sukurtos įgyvendinant projektą „Aukštųjų mokyklų tinklo optimizavimas ir studijų kokybės gerinimas Šiaulių universitetą prijungiant prie Vilniaus universiteto“ (Nr. 09.3.1-ESFA-V-738-03-0001), finansuojamą iš Europos socialinio fondo lėšų pagal 2014–2020 metų Europos Sąjungos fondų investicijų veiksmų programos 9 prioriteto „Visuomenės švietimas ir žmogiškųjų išteklių potencialo didinimas“ įgyvendinimo priemonę Nr. 09.3.1-ESFA-V-738 „Aukštųjų mokyklų tinklo tobulinimas“.

Metodinė medžiaga „Minimalūs jungiamieji medžiai“ skirta informatikos ir informacinio mąstymo mokymui. Tikslinė grupė – būsimi informatikos pagrindinio ugdymo mokytojai. Medžiaga siejasi su informatikos ir matematikos Bendrosiomis programomis, algoritmų ir programavimo pasiekimų sritimi. Atlikdami veikloje numatytas užduotis studentai išsiaiškins, kokias gyvenimiškas problemas sprendžiant ir kaip taikomas minimalaus jungiamojo medžio algoritmas. Pateikiamas teorinis temos pagrindimas mokytojui, aptariamos pagrindinės srities sąvokos.

Veikloje naudojamos *CS Unplugged* (csunplugged.org) užduotys pagal *Creative Common* licenciją.

Veiklą parengė: dr. Eglė Jasutė ir prof. dr. Valentina Dagienė

Redagavo: Viktoras Dagys

Vilnius, 2022

Įvadas

Tinklo sujungimo problemos dažnos realiame gyvenime. Kuriant naują (ar plečiant jau esančią) gyvenvietę reikia suprojektuoti elektros, dujų ir vandens linijas į kiekvieną namą. Jomis tiesiami elektros laidai, dujų ar vandens vamzdžiai. Kiekvienas namas turi būti prijungtas prie reikiamo tinklo.

Realiam gyvenime esama daug įvairių tinklų – tai telefonų tinklai, komunalinių paslaugų tinklai, kompiuterių tinklai, kelių ir kiti tinklai. Kuriant paslaugų tinklus svarbu nustatyti, kur optimalu tiesti kelių, ryšio kabelius ir panašiai. Todėl dažnai sprendžiamas efektyvaus objektų sujungimo į tinklą uždavinys.

Problema, kai reikia suprojektuoti trumpiausią tinklą, vadinama *minimalaus jungiamojo medžio* uždaviniu.

Minimalus jungiamasis medis pravartus ne tik komunaliniams tinklams, bet ir kompiuterių, telefono ryšio tinklams, naftotiekio ar oro linijoms projektuoti. Planuojant geriausią kelionės maršrutą reikia atsižvelgti ne tik į kelionės patogumą, bet ir į kainą. Niekas nenori praleisti valandų valandas lėktuve keliaudamas į kitą šalį aplinkiniu maršrutu vien dėl to, kad tokia kelionė yra pigesnė.

Minimalus jungiamasis medis naudojamas sprendžiant ir kitus grafų uždavinius, pavyzdžiui, sprendžiant „Keliaujančio pirklio“ uždavinį ieškoma trumpiausio kelio, kuriuo turi būti aplankytos visos grafo viršūnės.

Informatikoje ir matematikoje uždaviniams spręsti dažnai naudojami grafai. Pirmą kartą išgirdus apie grafo sąvoką galima pagalvoti, kad tai panašu į grafiką, vartojamą statistikoje duomenims vaizduoti. Nieko panašaus, grafai informatikoje yra kas kita.

Grafas yra figūra, sudarytas iš taškų (vadinamų viršūnėmis) ir atkarpų (vadinamų briaunomis). Briauna nebūtinai turi būti tiesi linija (gali būti lenkta, banguota ir pan.), tačiau ji visada jungia dvi viršūnes. Kai briauna jungia viršūnę su ja pačia, ji vadinama kilpa. Grafuose linijų ilgis neturi reikšmės – jokio mastelio nereikia laikytis.

Grafus nagrinėjo ir jų teorijai pagrindą padėjo XVIII a. matematikas L. Oileris (*Leonard Euler*).

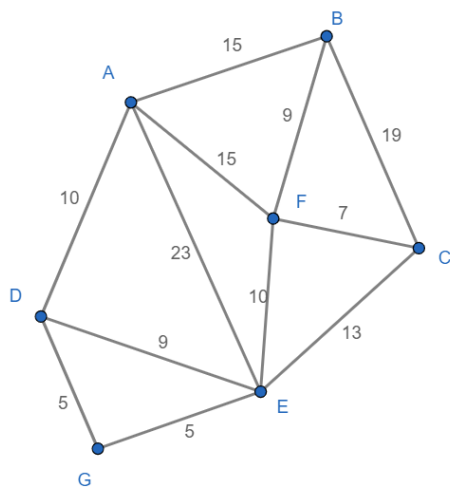
Vienas iš grafų yra jungiamasis medis, kurį aptarsime tolesniame skyrelyje. Šioje veikloje nagrinėjami minimalaus jungiamojo medžio uždaviniai. *Minimalaus jungiamojo medžio* uždaviniams spręsti sukurta daug efektyvių algoritmų. Galima pradėti nuo miesto plano, kuriame nesusižymėtos gatvės, ir žymėti po vieną gatvę, jungiančią du, iki šiol dar

neprijungtus namus. Šį algoritmą 1956 m. aprašė J. B. Kruskalas (*Joseph B. Kruskal*), todėl jis vadinamas Kruskalo algoritmu.

Kas yra medis ir jungiamasis medis?

Kas yra medis ir kas yra jungiamasis medis aptarsime remdamiesi telefono tinklo pavyzdžiu.

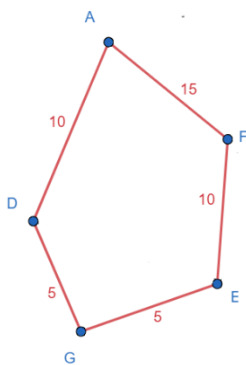
Įsivaizduokime, kad mums reikia įrengti ryšių liniją tarp septynių miestų (A, B, C, D, E, F, G). Jie turi būti sujungti į vieną tinklą taip, kad būtų galima paskambinti iš bet kurio miesto į bet kurį. Grafe pavaizduoti kabeliai, jungiantys šiuos miestus. Briaunų svoriai rodo, kiek tūkstančių eurų kainuotų nutiesti kabelį tarp tam tikrų miestų. Reikia sujungti miestus taip, kad tinklo įrengimas kainuotų kuo mažiau.



Tokio uždavinio sprendinys yra pats grafas, kuris yra pradinio grafo dalis (pografis). Pradiniame grafe pavaizduotos visos galimos jungtys tarp miestų. Mums reikia sudaryti optimalią jungčių aibę, kuri apima visas grafo viršūnes. Naujasis grafas turi tenkinti šias dvi sąlygas:

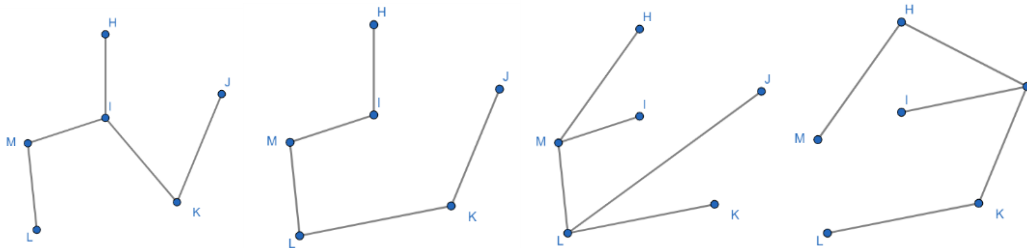
1. Turi būti jungusis. Pagal sąlygą kiekvienas miestas turi būti sujungtas su kiekvienu kitu miestu.
2. Jame neturi būti ciklų. Tai reiškia, kad neturi būti įmanoma apeiti kelis miestus ir sugrįžti į pradinį miestą.

Pigiausiame grafe negali būti daugiau briaunų nei būtina skirtingiems miestams sujungti. Pavyzdžiui, jei grafe būtų ciklas, kaip parodyta paveiksle, tai ištrinus vieną briauną, tinklas vis tiek pasiektų visus miestus.

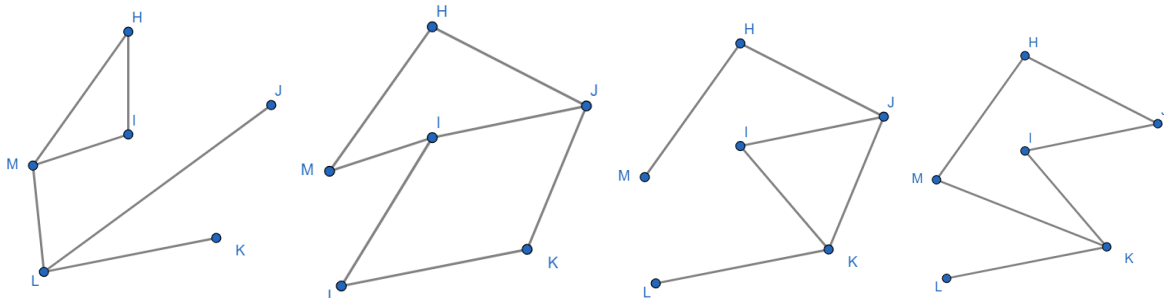


Jungusis grafas, neturintis ciklą, vadinamas medžiu. Taigi, telefono tinklo uždavinio sprendinys turi būti *medis*. Toks medis, kuris jungia visas grafo viršūnes, vadinamas *jungiamuoju medžiu*.

Medžių pavyzdžiai



Grafų, kurie nėra medžiai, pavyzdžiai



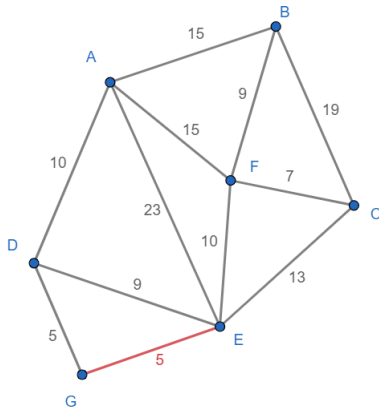
Kai kalbame apie svorinį (briaunos turi svorius – kainas) jungiamąjį medį (toks yra mūsų pradiname uždavinyje), vienas ar keli jungiamieji medžiai pradiname grafe gali turėti mažiausią svorį (kainą). Tokie medžiai vadinami *minimaliais jungiamaisiais medžiais*.

Dabar pradinį uždavinį galime performuluoti į minimalaus jungiamojo medžio uždavinį – rasti mažiausią kainą turintį medį, kuris jungia visas viršūnes (miestus).

Tam panagrinėsime paprastą algoritmą, kurį taikant visada galima rasti jungiamojo svorinio grafo minimalųjį jungiamąjį medį. Šis algoritmas žinomas *Kruskalo algoritmo* vardu.

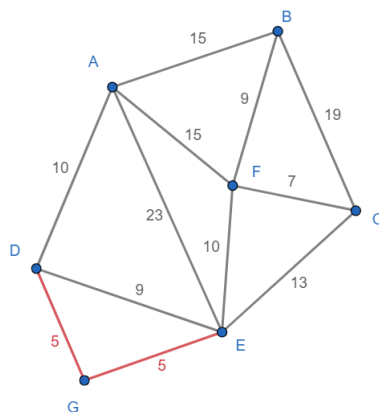
1 žingsnis

Pirmiausiai randame pigiausią grafo briauną (jei tokių yra ne viena, pasirenkame bet kurią iš pigiausių). Pažymėkime ją raudonai (be abejo, galima naudoti ir kitas spalvas). Mūsų grafe tai galėtų būti briauna EG.



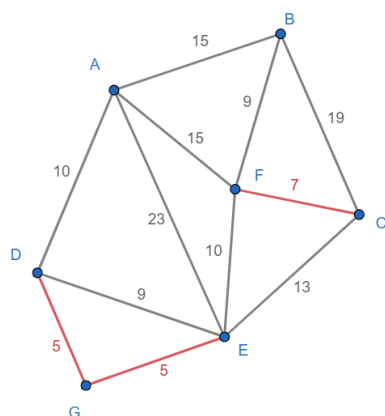
2 žingsnis

Randame grafe pigiausią dar nepažymėtą (t. y., nenuspalvintą) briauną, kurią pažymėjus raudonai nesusidarytų raudono ciklo (prisiminkime: jokių ciklų!). Jei tokių yra ne viena, pasirinkime bet kurią. Raudonai pažymėkime DG briauną.



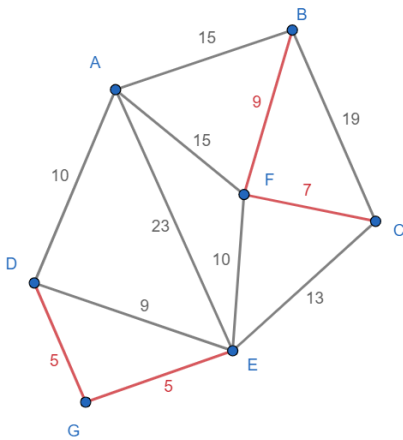
3 žingsnis

Toliau pigiausia briauna yra CF.



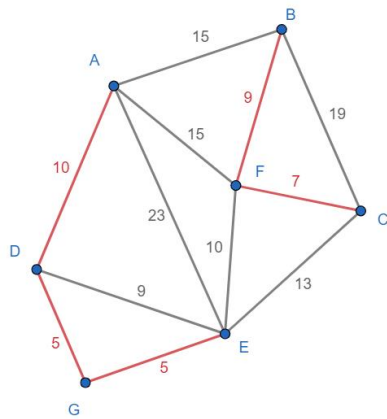
4 žingsnis

Trumpiausios nepažymėtos briaunos yra DE ir BF. Jei pažymėtume DE, tai gautume ciklą (prisiminkime: jokių ciklų!), todėl spalviname BF.



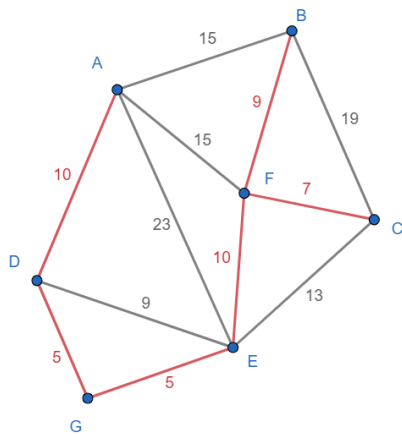
5 žingsnis

Toliau ieškome kitos nepažymėtos pigiausios briaunos. Tokios yra dvi: AD ir EF. Tarkime, renkame AD.



6 žingsnis

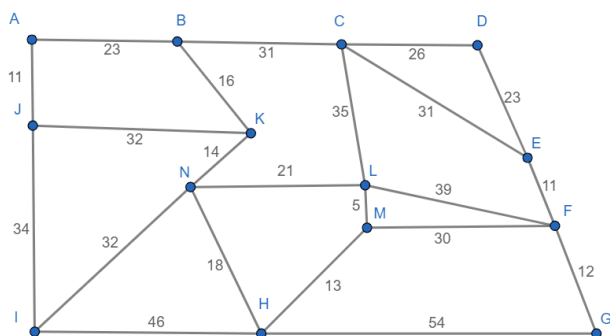
Dabar mums lieka nuspalvinti EF, nes ji pigiausia iš likusių nepažymėtų.



Štai ir gavome pigiausią tinklą, kuris jungia visus miestus.

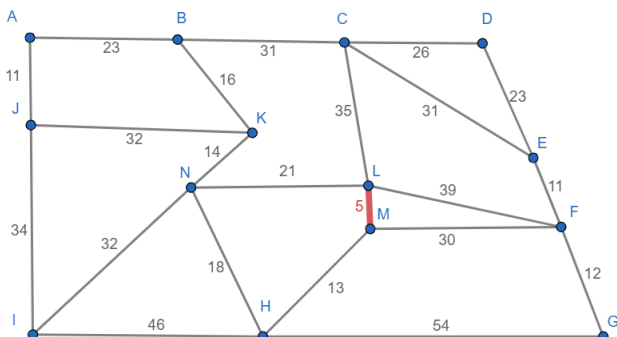
Kruskalo algoritmo taikymo pavyzdys (pagal 1 šaltinį)

Užduotis. Paveiksle pavaizduota vejų laistymo sistema, joje taškais (viršūnėmis) vaizduojami vandens purkštuvai, į kuriuos turi būti tiekiamas vanduo. Viršūnė A yra centrinis vandens rezervuaras. Briaunomis vaizduojami keliai, kuriais galima tiesti vandens vamzdžius, o briaunų svoriai nurodo galimų jungčių kainas. Reikia nutiesti vandens vamzdžius taip, kad vanduo iš A rezervuaro patektų į visus purkštuvus. Be to, tai turi būti padaryti kiek galima pigiau.

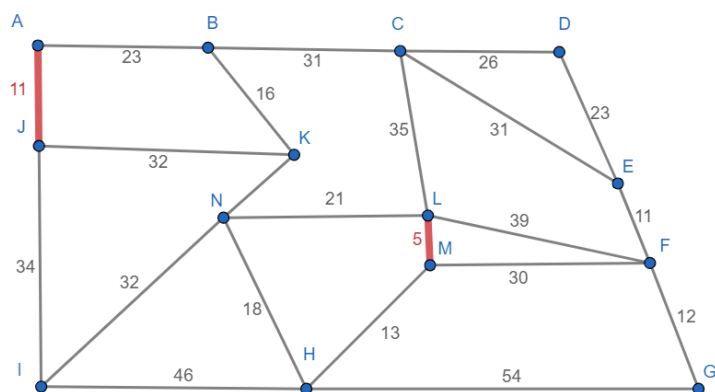


Šiam uždaviniui spręsti naudosime Kruskalo algoritmą.

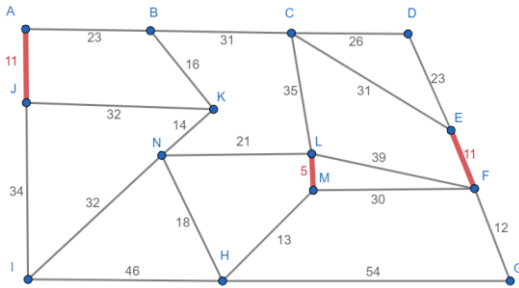
1 žingsnis. Randame grafe mažiausio svorio briauną ir nuspalviname ją. Mažiausio svorio briauna yra LM.



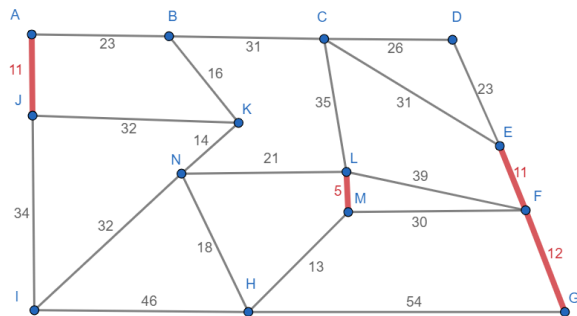
2 žingsnis. Randame kitą mažiausio svorio briauną. Tokios briaunos yra AJ ir EF. Šiuo žingsniu nuspalviname AJ:



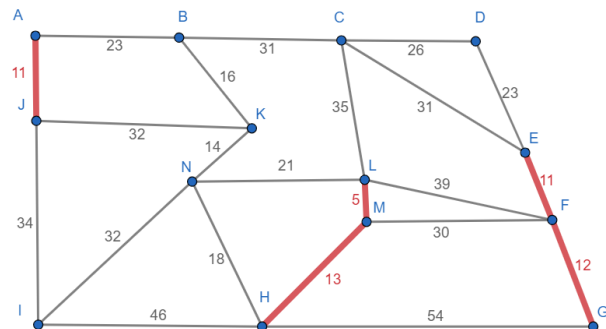
3 žingsnis. Nuspalviname briauną EF:



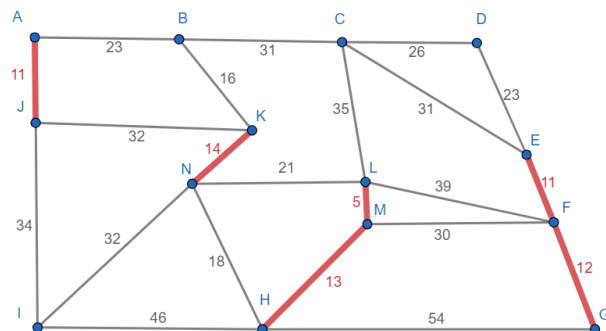
4 žingsnis. Randame mažiausio svorio nepažymėtą briauną FG ir ją nuspalviname:



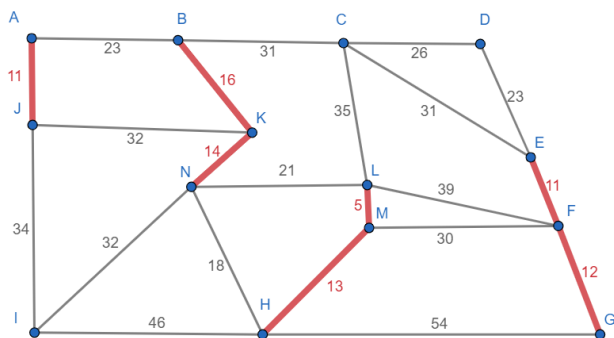
5 žingsnis. Randame mažiausio svorio nepažymėtą briauną HM ir ją nuspalviname:



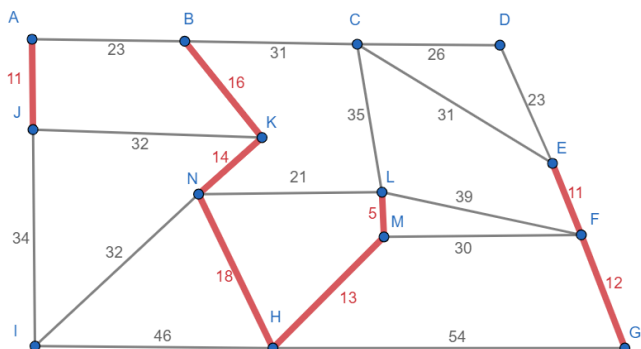
6 žingsnis. Randame mažiausio svorio nepažymėtą briauną NK ir ją nuspalviname:



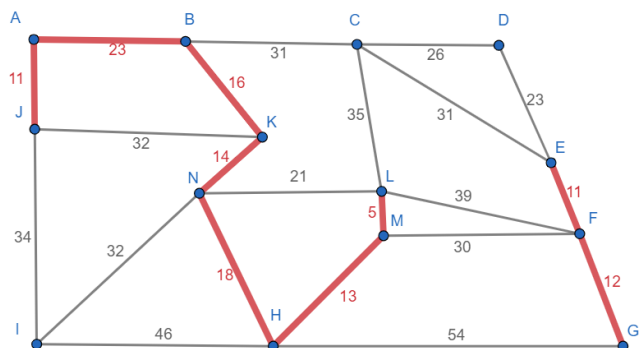
7 žingsnis. Randame mažiausio svorio nepažymėtą briauną BK ir ją nuspalviname:



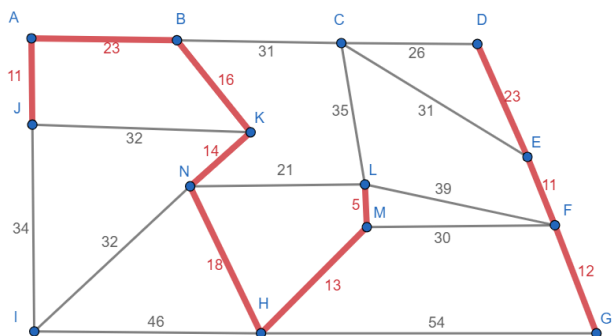
8 žingsnis. Randame mažiausio svorio nepažymėtą briauną HN ir ją nuspalviname:



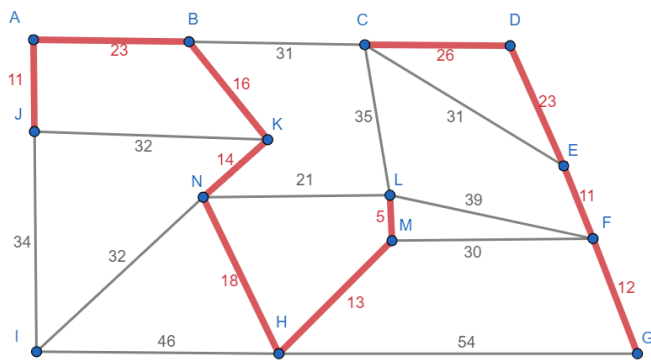
9 žingsnis. Randame mažiausio svorio nepažymėtą briauną NL. Tačiau ji netinka, nes ją nuspalvinus susidaro ciklas. Kita pigiausia griauņa yra AB. Nuspalviname:



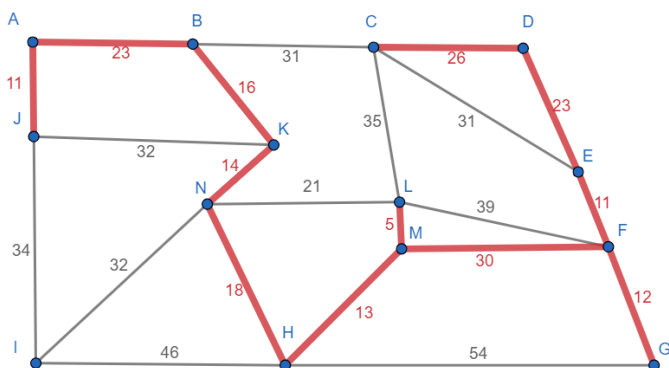
10 žingsnis. Randame mažiausio svorio nepažymėtą briauną DE ir nuspalviname:



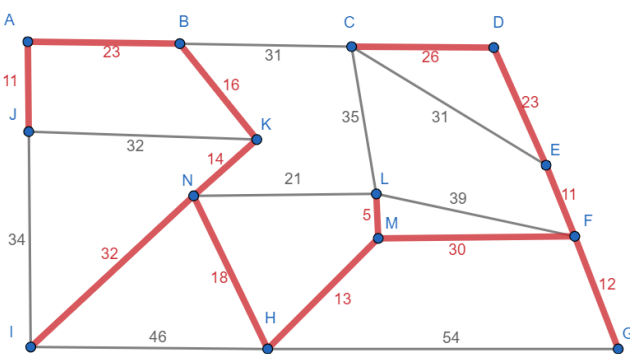
11 žingsnis. Randame mažiausio svorio nepažymėtą briauną CD ir nuspalviname:



11 žingsnis. Randame mažiausio svorio nepažymėtą briauną FM ir ją nuspalviname:



12 žingsnis. Randame mažiausio svorio nepažymėtą briauną CE: netinka, nes sudaro ciklą. Tuomet tokios pačios kainos yra BC, tačiau ją jungiamos abi viršūnės jau priklauso medžiui. Kita pigiausia briauna yra JK, bet taip pat sudaro ciklą. NI yra pigiausia tinkama briauna. Nuspalviname ją:



Raudonos briaunos jungia visas grafo viršūnes. Gavome minimalų jungiamąjį medį, nusakantį pigiausią vejos laistymo sistemos įrengimą.

Toliau pabandykite atlikti pateiktą užduotį savarankiškai.

„Purvino miesto“ uždavinys

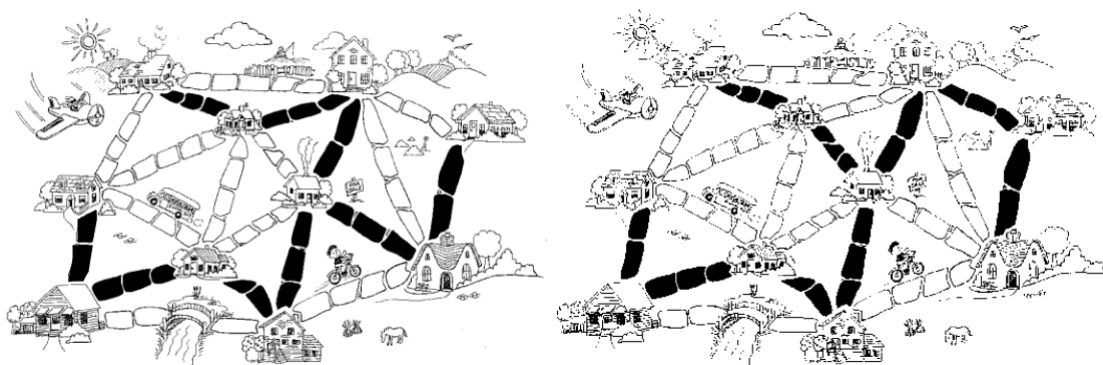
Ši veikla skiriama susipažinti, kaip kompiuteriai padeda surasti geriausių realaus uždavinio – kaip geriausia nutiesti kelių – sprendimų. Studentams išdalijami darbo lapai, kuriuose paaiškinta *Purvino miesto* problema.

Diskusija

Aptariama, kokiais būdais studentai galvoja ieškoti sprendimo.

Šią užduotį galima spręsti keliais būdais. Vienas būdas – pradėti nuo miesto plano, kuriame nėra sužymėta gatvių. Reikia žymėti po vieną gatvę, jungiančią du namus, prie kurių gatvė dar nenutiesta. Kitas uždavinio sprendimo būdas, kai miesto plane yra sužymėtos visos gatvės, – šalinti po vieną nereikalingą gatvę ir tikrinti, ar į visus namus galima patekti likusiomis gatvėmis.

Šio uždavinio sprendiniai gali būti skirtingi – visi namai gali būti sujungti vienodo ilgio, bet skirtingomis gatvėmis. Toliau paveiksle parodyti du skirtingi šio uždavinio sprendiniai.



Tada reikėtų aptarti, kur prireikia tinklų realiame gyvenime.

Informatikoje šie tinklų vaizdavimo būdai vadinami *grafais*. Grafas – tai taškai (viršūnės), sujungti linijomis (briaunomis). Realiame gyvenime tinklai gali būti vaizduojami grafais ieškant optimalaus sprendimo.

Grafų uždaviniams spręsti yra sukurta daug algoritmų, kuriais naudojantis, pavyzdžiui, lengviau rasti trumpiausią atstumą tarp dviejų taškų arba trumpiausią kelią, jungiantį visus taškus.

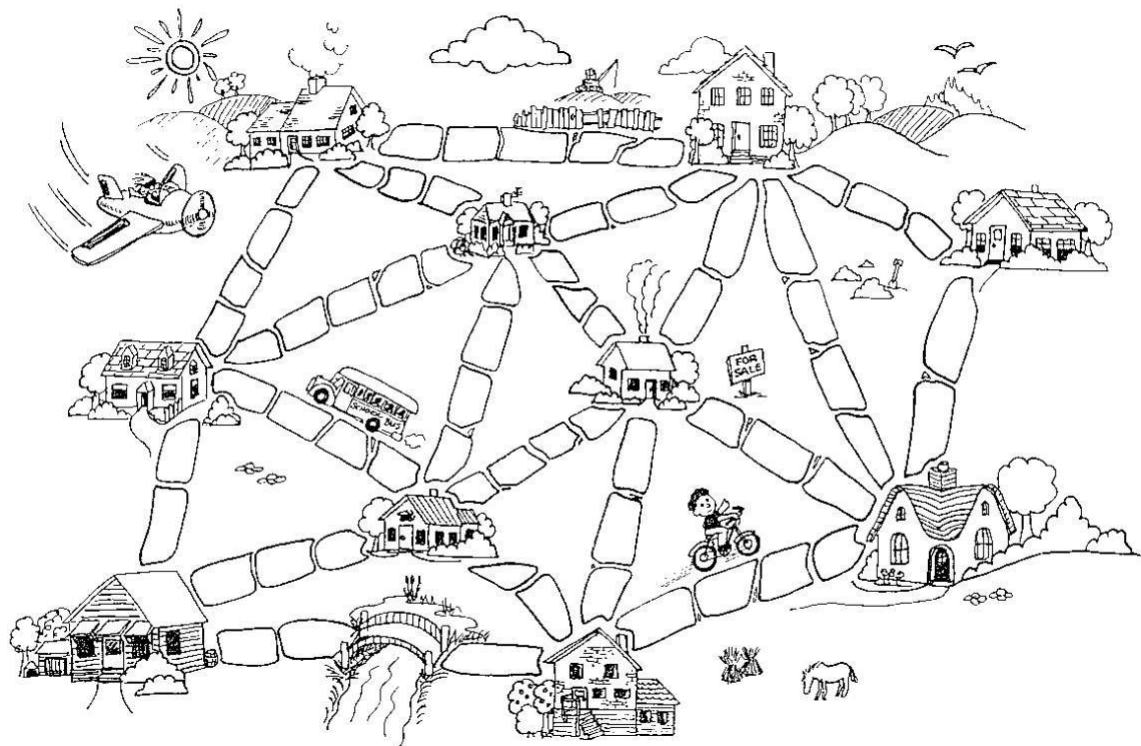
Darbo lapas „Purvino miesto“ uždaviniui

Vienoje šalyje yra miestas, kuriame nenutiasta grįstų gatvių. Po lietaus žemė mieste pažliunga, automobiliai klimpsta purve, o žmonės išsipurvina. Miesto meras nusprendė išgrįsti kai kurias miesto gatves, tačiau jis nenori išleisti daugiau pinigų, nei būtina, nes mieste dar reikia pastatyti baseiną. Meras iškėlė du reikalavimus:

1. Grįstų gatvių turi būti tiek, kad jomis būtų galima nueiti į kiekvieną namą.
2. Gatvių grindimo išlaidos turi būti mažiausios.

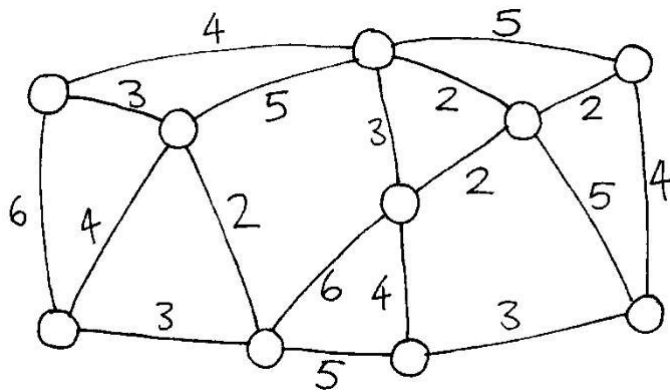
Pateiktas miesto planas. Akmenų skaičius tarp kiekvieno namo proporcingas gatvės grindimo kainai. Suraskite geriausią gatvių grindimo variantą, kuris sujungtų visus namus ir būtų pigiausias.

Pagalvokite, koku būdu galima pradėti spręsti šį uždavinį?



Sudėtingesnis uždavinys

Paveiksle grafu pavaizduoti namai ir keliai. Šiame grafe namai vaizduojami apskritimais, o keliai – linijomis, jungiančiomis apskritimus. Kelių ilgiai nurodyti skaičiais ties linijomis.



Studentai galėtų sukurti savo miestą ir draugų paprašyti sujungti vaizduojamus namus gatvėmis. Kiek mažiausiai gatvių reikia miesto namams sujungti? Ar mažiausias miesto gatvių skaičius priklauso nuo namų skaičiaus?

Pamąstykite ir aptarkite

Kiek gatvių reikia norint sujungti n namų?

Ar aišku, kad optimaliam sprendimui reikėtų sujungti $n-1$ gatvių?

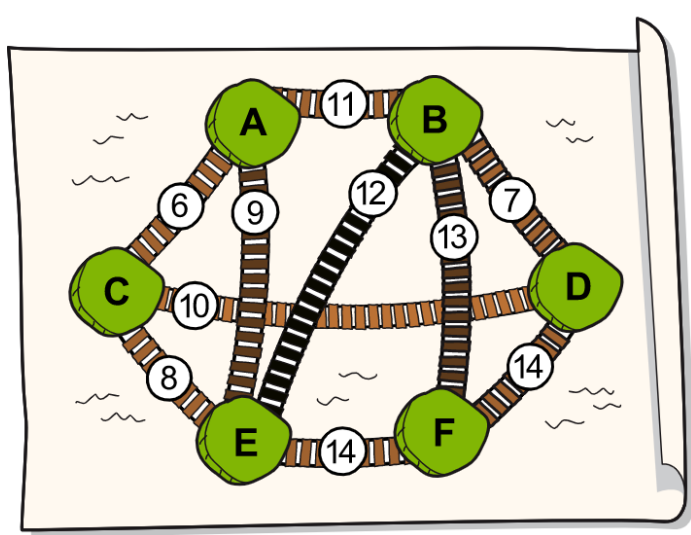
„Bebro“ konkurso uždaviniai

Informatinio mąstymo konkurse gausu uždavinių, kuriuos sprendžiant taikomi sprendimai, kurie remiasi grafais. Panagrinėkite pateiktus uždavinius, pagalvokite, kaip juos spręstumėte.

Kabantys tiltai

Šešiose salose gyvenanti džiunglių bendruomenė nori sujungti šias salas, nutiesdama kabančius tiltus. Buvo sudarytas galimo salų sujungimo planas. Tiltai vienas kito nekerta. Skaičiais parodytos tiltų statybos išlaidos.

Bendruomenė nori sujungti visas salas taip, kad iš bet kurios salos būtų galima keliauti į bet kurią kitą salą tiesiogiai arba per vieną ar kelias salas. Kartu bendruomenė nori statyti tiltus kuo pigiau.



Koks pigiausias būdas sujungti visas šešias salas?

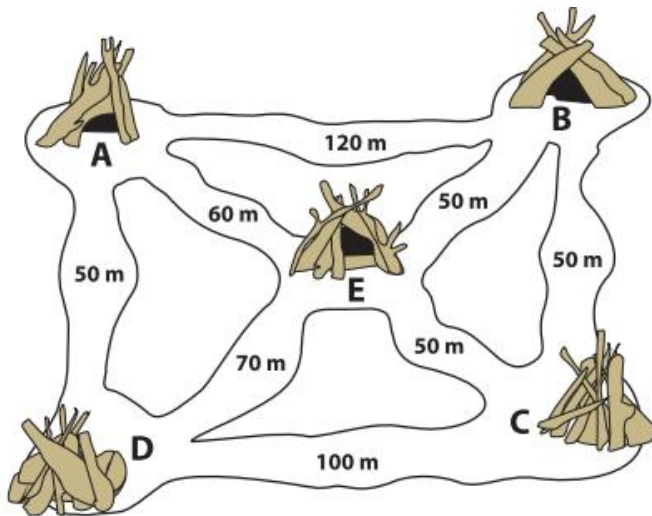
Išspręskite uždavinį ir aptarkite.

Kurio amžiaus mokiniams duotumėte jį spręsti?

Ką aiškintumėte?

Vandens kanalai

Paveiksle parodyta, kaip įsikūrė penkios bebrų buveinės (A, B, C, D, E).



Bebrai norėtų sujungti šias penkias buveines vandens kanalais ir taip, kad tiesiamų kanalų bendras ilgis būtų kuo mažiausias. Pasiūlykite bebrams visus galimus kanalų tiesimo variantus.

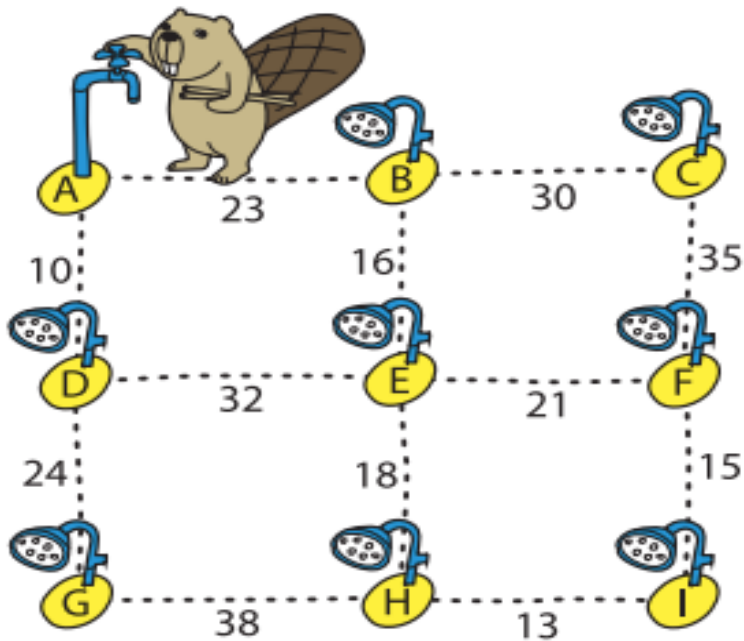
Išspręskite uždavinį ir **aptarkite**.

Kurio amžiaus mokiniams duotumėte jį spręsti?

Kokius teorinius klausimus nagrinėtumėte?

Vamzdžiai

Bebras nori sudaryti vamzdžių tinklą taip, kad vanduo nuo pagrindinio šaltinio A galėtų nutekėti iki kiekvienos purkštuvo galvutės (B, C, D, E, F, G, H, I).



Skaiciai ant kiekvieno vamzdžio rodo šio vamzdžio tiesimo išlaidas.

Kaip turėtų atrodyti vamzdžių tinklas, kad tiesimo kaina būtų kaip galima mažesnė?

Išspręskite uždavinį ir **aptarkite**.

Kurio amžiaus mokiniams duotumėte jį spręsti?

Gal pasiūlytumėte mokiniams sukurti patiems analogišką uždavinį?

Šaltiniai

J. B. Kruskal. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 7, pp. 48-50, 1956.

P. Tannenbaumas, R. Arnoldas Kelionės į šiuolaikinę matematiką. TEV, 1995.

Kraskalo algoritmas. <http://www.vartiklis.lt/science/math/kruskal.htm>

Informatikos olimpiados: algoritmai ir taikymo pavyzdžiai. VŠĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, 2015.

https://inf-knyga.nmakademija.lt/lt/latest/11_med%C5%BEiai.html

Kruskal's algorithm. https://en.wikipedia.org/wiki/Kruskal%27s_algorithm