



**Vilniaus
universitetas**

Informatikos ir informatinio mąstymo mokomoji veikla

Grafo spalvinimas

Mokyklos pedagogika



Kuriame
Lietuvos ateitį
2014–2020 metų
Europos Sąjungos
fondų investicijų
veiksmų programa



**Vilnius
universitetas**

Informatikos ir informatinio mąstymo mokomosios veiklos sukurtos įgyvendinant projektą „Aukštųjų mokyklų tinklo optimizavimas ir studijų kokybės gerinimas Šiaulių universitetą prijungiant prie Vilniaus universiteto“ (Nr. 09.3.1-ESFA-V-738-03-0001), finansuojamą iš Europos socialinio fondo lėšų pagal 2014–2020 metų Europos Sąjungos fondų investicijų veiksmų programos 9 prioriteto „Visuomenės švietimas ir žmogiškųjų išteklių potencialo didinimas“ įgyvendinimo priemonę Nr. 09.3.1-ESFA-V-738 „Aukštųjų mokyklų tinklo tobulinimas“.

Metodinė medžiaga „Grafo spalvinimas“ skirta Mokyklos pedagogikos studijų programos moduliui „Informatikos didaktika“. Tikslinė grupė – būsimi informatikos pagrindinio ar vidurinio ugdymo mokytojai. Medžiaga siejasi su informatikos ir matematikos Bendrosiomis programomis, algoritmų ir programavimo pasiekimų sritimi. Atlikdami veikloje numatytas užduotis studentai, būsimi mokytojai, išsiaiškins, kokius uždavinius sprendžiant ir kaip taikomas grafo spalvinimo metodas. Pateikiamas teorinis temos pagrindimas mokytojui, aptariamoms pagrindinėms srities sąvokoms.

Šioje informatikos ir informatinio mąstymo veikloje dalis medžiagos panaudota iš tarptautinio informatikos mokymo tinklo „Informatika be kompiuterio“ (*Computer Science Unplugged: csunplugged.org*), kurio visi ištekliai pateikiami taikant *Creative Common* licenciją.

Šios veiklos rengėjai: dr. Eglė Jasutė ir prof. dr. Valentina Dagienė

Visoms iliustracijoms yra taikoma Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International license (CC BY-NC-SA 4.0).

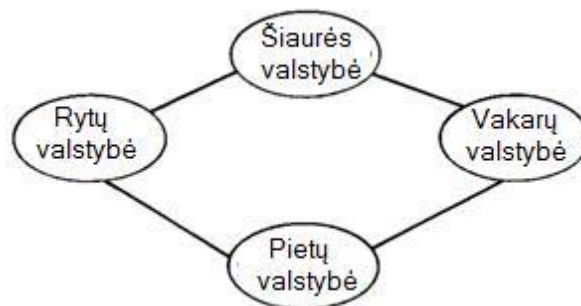
Redagavo: Viktoras Dagys

Įvadas. Apie ką visa tai?

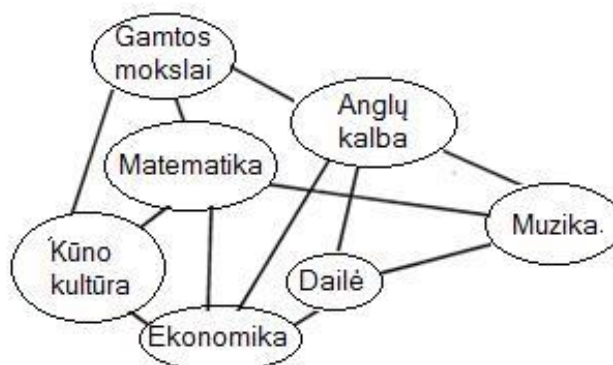
Žemėlapių spalvinimas priklauso grafo spalvinimo uždavinių grupei. Informatikoje grafas yra abstrakti objektų ryšių sistema.

Informatikoje grafai vaizduojami schemomis nusakant, kaip vienas objektas susijęs su kitu. Sutarta, kad objektai vaizduojami apskritimais arba taškais (vadinama *viršūnėmis*), sujungtais linijomis (kartais vadinama *briaunomis*), kurios rodo ryšius tarp vaizduojamų objektų.

Patyrinėkite paveikslą, kaip valstybės susijusios viena su kita. Viršūnės vaizduoja valstybes, o linijos – valstybių sienas. Grafo spalvinimo uždavinys formuluojamas taip: viršūnės turi būti sujungtos skirtingų spalvų linijomis. Spalvinant grafą neribojamas skirtingų spalvų skaičius, nes grafo viršūnės gali būti jungiamos daugeliu būdų. Grafo spalvinimo uždavinys skirtas surasti mažiausių skaičių skirtingų spalvų tam tikram grafui nuspalvinti.



Kitame paveiksle viršūnės atitinka mokykloje mokomus dalykus. Linija, jungianti dvi viršūnes, reiškia, kad bent vienas mokinys mokosi tų dviejų dalykų, todėl tvarkaraštyje abiejų dalykų pamokos negali būti įrašytos vykstančios vienu metu.



Optimalaus pamokų tvarkaraščio sudarymas taip pat yra grafo spalvinimo uždavinys, kiekviena spalva reiškia vis kitą pamokos laiką.

Grafų spalvinimo algoritmas dažnai naudojamas realaus gyvenimo uždaviniams spręsti, bet iš tikrųjų nelabai taikomas žemėlapiams spalvinti (nors pati problema ir pavadinta žemėlapių spalvinimu). Iš tiesų, kartografo veikla yra tik gražus problemos pateikimas.

1852 m. buvo suformuluotas teiginys, kad bet kokią žemėlapią galima nuspalvinti mažiausiai keturiomis skirtingomis spalvomis, bet iki 1976 m. jis nebuvo įrodytas. Ši keturių spalvų teorema buvo įrodyta tik po 120 metų (informatikos mokslas turėjo ir tebeturi daugybę neatsakytų klausimų).

Kompiuterio sugaištas laikas grafų spalvinimo uždaviniui spręsti ilgėja eksponentiškai didėjant grafo dydžiui. Žemėlapio spalvinimo uždavinys gali būti sprendžiamas perrenkant visus įmanomus spalvinimo variantus. Žinoma, kad pakanka keturių skirtingų spalvų. Vadinasi, reikia patikrinti visas žemėlapio spalvinimo keturiomis spalvomis galimybes. Jei žemėlapyje yra n valstybių, tai galimybių jam nuspalvinti yra 4^n . Šis skaičius auga labai greitai: kiekviena šalis padidina galimybių skaičių 4 kartais ir tokiu būdu keturgubina sprendimo laiką. Net jei būtų toks kompiuteris, kuris galėtų rasti 50 valstybių spalvinimo sprendimą per valandą, tai 51 šaliai nuspalvinti reiktų jau 4 valandų.

Grafo spalvinimas yra geras pavyzdys uždavinio, kurio sprendimo laikas ilgėja eksponentiškai. Paprastu atveju, kai mažai valstybių, surasti optimalų sprendimą yra gana paprasta ir tai galima padaryti nesinaudojant kompiuteriu, bet didėjant valstybių skaičiui uždavinys tampa nebeišsprendžiamas net ir naudojantis kompiuteriu.

Realiame gyvenime dažnai tenka spręsti tokius uždavinius, kai negalima gauti tikslaus atsakymo. Informatikos metodai pateikia gana gerų, bet ne visiškai tikslių sprendimų. Šie euristinių metodų rezultatai yra labai artimi optimaliems, greitai apdorojami kompiuteriu ir tinkami praktiniams tikslams. Pavyzdžiui, mokyklose gali prireikti vieno kabineto daugiau, nei būtina, dėl mažos pamokų tvarkaraščio paklaidos, taip pat ir žemėlapyje gali būti viena spalva daugiau, nei būtina.

Niekas neįrodė, kad nėra efektyvaus būdo šiems uždaviniams spręsti, bet taip pat niekas neįrodė, kad jis yra. Informatikos mokslininkai lieka skeptiški, kad kada nors bus rastas efektyvus metodas grafo spalvinimo uždaviniui.

Grafo spalvinimo uždaviniuose, kurie sprendžiami atliekant čia aprašytas veiklas, reikia surasti mažiausių skaičių skirtingų spalvų (dvi, tris, keturias spalvas), kuriomis būtų galima nuspalvinti vieną ar kitą žemėlapią.

Išsamiau apie grafo spalvinimą

Grafo spalvinimas - tai grupė uždavinių, kuriuose siekiama grafo elementams priskirti spalvas taip, kad būtų tenkinamos tam tikros sąlygos (paprastai – kad gretimi grafo elementai būtų skirtingų spalvų). Iš tokių uždavinių dažniausiai naudojamas viršūnių spalvinimas, kai kiekvienai viršūnei priskiriama spalva taip, kad gretimos viršūnės turėtų skirtingas spalvas, kiek rečiau – briaunų spalvinimas, kai spalvos priskiriamos briaunoms.

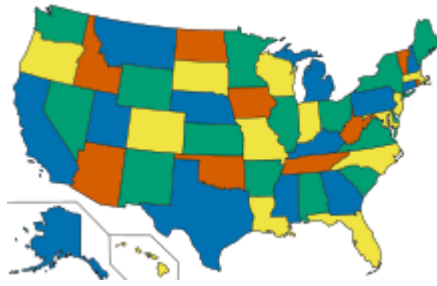
Matematikoje keturių spalvų teorema arba keturių spalvų žemėlapių teorema teigia, kad norint nuspalvinti bet kurio žemėlapių sritis, kad du gretimi regionai nebūtų vienodos spalvos, reikia ne daugiau kaip keturių spalvų. Gretima reiškia, kad du regionai turi bendrą ribinės kreivės segmentą, o ne tik kampą, kuriame susikerta trys ar daugiau regionų.

Įdomu tai, kad grafo spalvinimo problema buvo pirmoji rimta teorema, kuri buvo įrodyta kompiuteriu. Iš pradžių šis įrodymas nebuvo priimtas visų matematikų, nes kompiuterinio įrodymo buvo neįmanoma žmogui patikrinti ranka. Prireikė laiko, kol įrodymas sulaukė plataus pripažinimo, nors tebėra abejojančių mokslininkų.

Keturių spalvų teoremą 1976 m. įrodė Kennethas Appelis ir Wolfgangas Hakenas po daugybės klaidingų įrodymų ir priešingų pavyzdžių (skirtingai nei penkių spalvų teorema, įrodyta 1800-aisiais, teigianti, kad žemėlapiui nuspalvinti pakanka penkių spalvų). Kad išsklaidytų visas likusias abejones dėl Appelio ir Hakeno įrodymo, 1997 m. Neilas Robertsonas, Danielis Sandersas, Paulas Seymouras ir Robinas Thomasas paskelbė paprastesnį įrodymą, kuriame naudojamos tos pačios idėjos ir vis dar remiamasi kompiuteriais. 2005 m. teoremą taip pat įrodė Georgesas Gontheris, naudodamas bendrosios paskirties teoremų tikrinimo programinę įrangą.

Intuityvus keturių spalvų teoremos teiginys – „atsižvelgiant į bet kokį plokštumos atskyrimą į gretimas sritis, sritys gali būti nuspalvintos daugiausia keturiomis spalvomis, kad nebūtų dviejų gretimų sričių, kurios būtų vienodos spalvos“ – turi būti tinkamai interpretuojamas, kad būtų teisingas.

Pirma, regionai yra gretimi, jei jų ribos yra atkarpa, tai yra, du regionai, kurie dalijasi tik pavieniais ribiniais taškais, nelaikomi gretimais. Antra, neleidžiami keisti regionai, pavyzdžiui, turintys ribotą plotą, bet be galo ilgą perimetrą – žemėlapiams su tokiais regionais gali prireikti daugiau nei keturių spalvų. (Saugumo sumetimais galime apsiriboti regionais, kurių ribos susideda iš daugybės tiesių linijų atkarpų. Leidžiama, kad regionas visiškai suptų vieną ar daugiau kitų regionų.) Atkreipkite dėmesį, kad sąvoka „gretimas regionas“ nėra tas pats, kas įprastuose žemėlapiuose esanti „šalis“, nes šalys nebūtinai turi būti gretimos (pvz., Kabindos provincija – Angolos dalis, Nachivanas – Azerbaidžano dalis, Kaliningrado sritis – Rusijos dalis, Aliaska – JAV dalis, nėra gretimos).



Keturiomis spalvomis nuspalvintas JAV valstijų žemėlapis

Klausimai ir diskusija

Ką radote internete apie grafo spalvinimo problemą?

Padiskutuokite, kodėl matematikai abejoja kompiuterių įrodymais? Paieškokite argumentų.

Pavaizduokite JAV valstijų žemėlapią grafu (kruopštumo reikalaujantis uždavinys).

Grafo spalvinimas



Daugelyje optimizavimo uždavinių tam tikri įvykiai negali vykti vienu metu ar tam tikri objektai negali būti gretimi. Pavyzdžiui, kiekvienas, kam teko daryti klasės ar susitikimo tvarkaraštį, yra susidūręs su visų dalyvių sąlygų suderinimo problema. Tokio pobūdžio uždaviniai gali būti sprendžiami taikant grafo spalvinimo metodą. Spalvinant grafą siekiama, kad gretimi jo elementai būtų skirtingų spalvų. Atliekant šią veiklą grafo spalvinimo metodu sudaromas žemėlapis.

Ryšiai su bendrosiomis programomis

- Matematika: skaičiai, dvejetainė skaičiavimo sistema
- Matematika: algebra, begalinė skaičių seka, skaičių sekos taisyklės, dvejetainis laipsnis

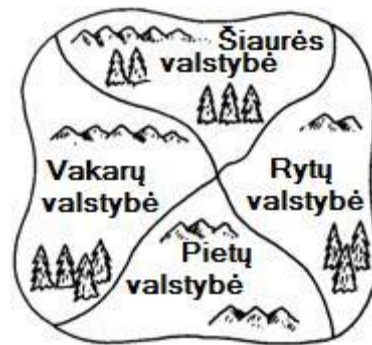
Priemonės

- Lenta arba kitas rašymo paviršius ir rašymo priemonė
- Vieno ar kelių darbo lapo kopijos
- Spalvoti smeigtukai ar spalvoti lipnieji lapeliai
- Spalvoti pieštukai, flomasteriai ar kreidelės

Šioje veikloje pasakojama apie kartografa, kuriam mokiniai turi padėti nuspalvinti žemėlapią taip, kad gretimos valstybės būtų skirtingų spalvų.

Gal mokiniams patiks štai tokia vaizdi išgalvota istorija? Galite sugalvoti ir kitokių istorijų apie žemėlapių spalvinimą.

Paveiksle parodytas žemėlapis su keturiomis valstybėmis: Šiaurės, Vakarų, Rytų ir Pietų. Jei Šiaurės valstybė nuspalvinama raudonai, tai Vakarų negali būti spalvinama raudonai, nes nesimatys sienos su Šiaurės valstybe. Vakarų valstybę galima spalvinti, pavyzdžiui, žaliai. Tada ir Rytų valstybė gali būti spalvinama žaliai, nes neturi bendrų sienų su Vakarų valstybe (jei dvi valstybės liečiasi tik viename taške, laikoma, kad jos neturi bendrų sienų). Pietų valstybė gali būti spalvinama raudonai, nes neturi bendrų sienų su Šiaurės valstybe.



Šio pasakojimo kartografas gyvena labai vargingai ir negali įsigyti daug spalvotų pieštukų, todėl prašoma naudoti kuo mažiau spalvų.

Veikla ir diskusija

Šiai veiklai pateikiami keturi pavyzdžiai – darbo lapai. Jie skirti mokiniams, tačiau juos turėtų gerai išnagrinėti ir studentai, būsimi mokytojai, kad gerai suprastų sprendimo eigą, gebėtų paaiškinti kylančias problemas.

Pirmasis darbo lapas. Pirmojo darbo lapo pavyzdžiui nuspalvinti pakanka tik dviejų spalvų. Vis tik sumažinti spalvų skaičių iki dviejų daugeliui mokinių gali būti sunku. Tačiau ši užduotis yra paprasta, palyginti su žemėlapiais, kuriuose yra daugiau valstybių ir reikia daugiau spalvų.

Spalvindami žemėlapij dviem spalvomis mokiniai gali suformuluoti taisyklę: jei viena valstybė spalvinama viena spalva, tai jos kaimynė turi būti spalvinama kita spalva. Ši taisyklė kartojama, kol nuspalvinamas visas žemėlapis. Geriausia siekti, kad šią taisyklę mokiniai sugalvotų ir pateiktų patys.

Padiskutuokite, kodėl šiam pavyzdžiui nuspalvinti užtenka dviejų spalvų? Kokie Jūsų argumentai?

Antrasis darbo lapas. Tai jau sunkesnė užduotis. Pasiūlykite mokiniams pasitarti, kokiomis priemonėmis geriau spręsti grafo spalvinimo uždavinius. Galbūt mokiniai, užuot spalvinę, sugalvos naudoti spalvotus smeigtukus arba lipniusius lapelius. Šis būdas leidžia apsigalvoti ir prireikus valstybę pažymėti kita spalva.

Ar galite paaiškinti, koku būdu spalvinant žemėlapij prireikia mažiausiai spalvų? Vienas iš mąstymo būdų, kodėl šiam žemėlapiui reikia bent trijų spalvų, galėtų būti toks: daugiausiai trys valstybės turi bendrų sienų.

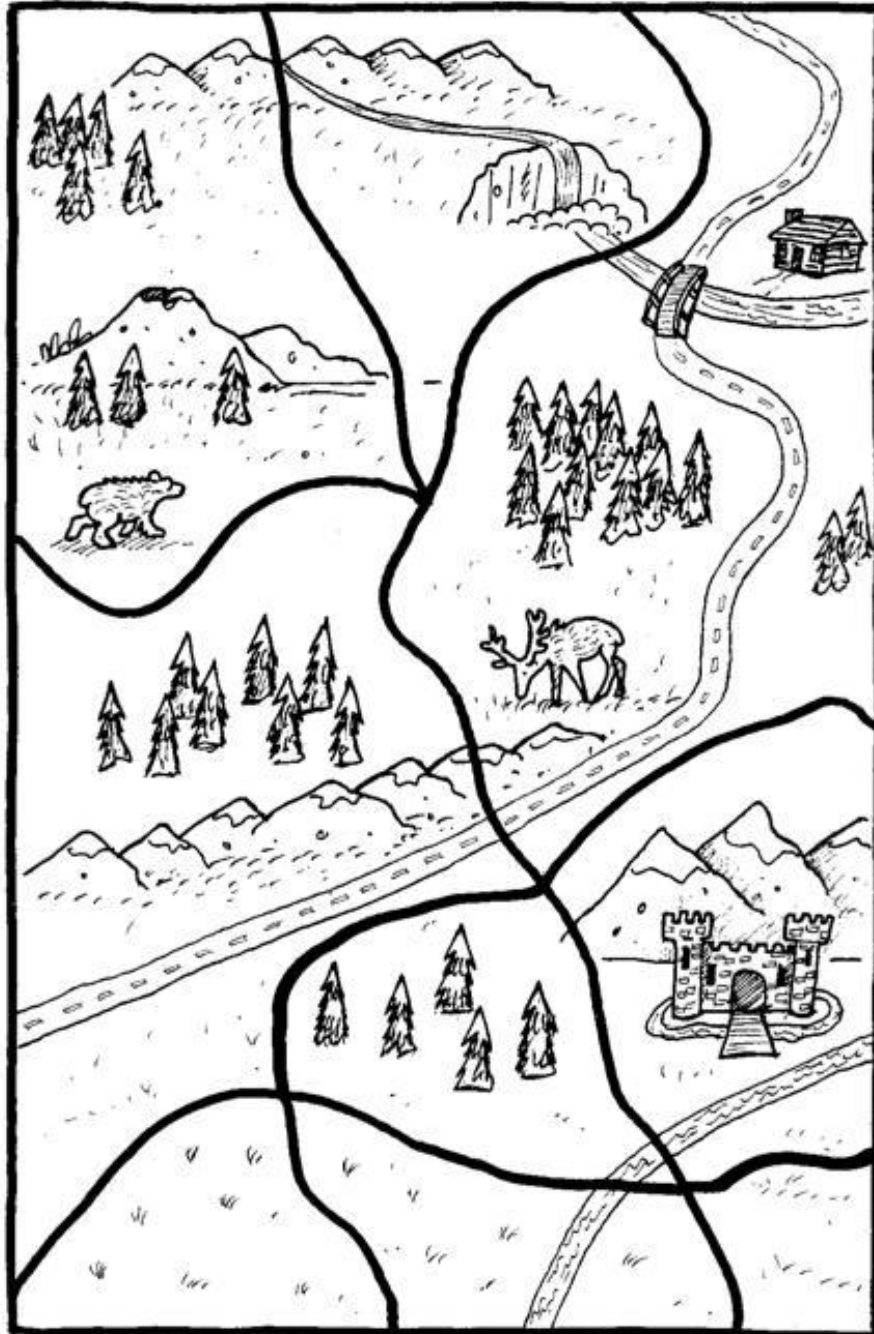
Tolesni darbo lapų pavyzdžiai (trečiasis ir ketvirtasis) sudėtingesni, prireiks daugiau spalvų. Atsakymai pateikiami šios medžiagos pabaigoje. Būtinai skatinkite mokinius diskutuoti, argumentuoti, ieškoti geresnių sprendimo kelių. Mokiniai turi patys atrasti, kiek mažiausiai reikia spalvų spalvinant vieną ar kitą grafą.

Kai mokiniai nuspalvina visus žemėlapius, galima paprašyti, kad sukurtų ir savo žemėlapių, kuriems nuspalvinti reikėtų mažiausiai penkių spalvų, arba kad įrodytų, kad bet kuriam žemėlapiui nuspalvinti pakanka keturių spalvų. Tokiai užduočiai atlikti mokiniams turėtų prireikti daugiau laiko. Mokiniai gali greitai nubraižyti žemėlapij, kuriam nuspalvinti reikia penkių spalvų, bet daugeliu atvejų galima parodyti, kad jį galima nuspalvinti ir keturiomis spalvomis. Kaip manote, kodėl taip yra?

Pirmasis darbo lapas. *Grafo spalvinimas*

Nuspalvinkite valstybes šiuose žemėlapiuose naudodami kuo mažiau spalvų.

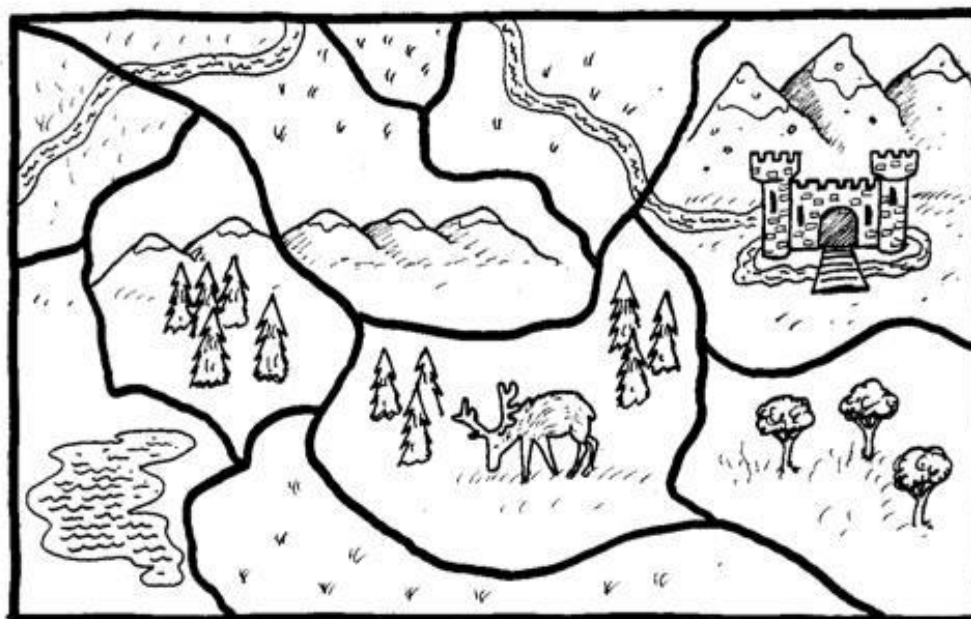
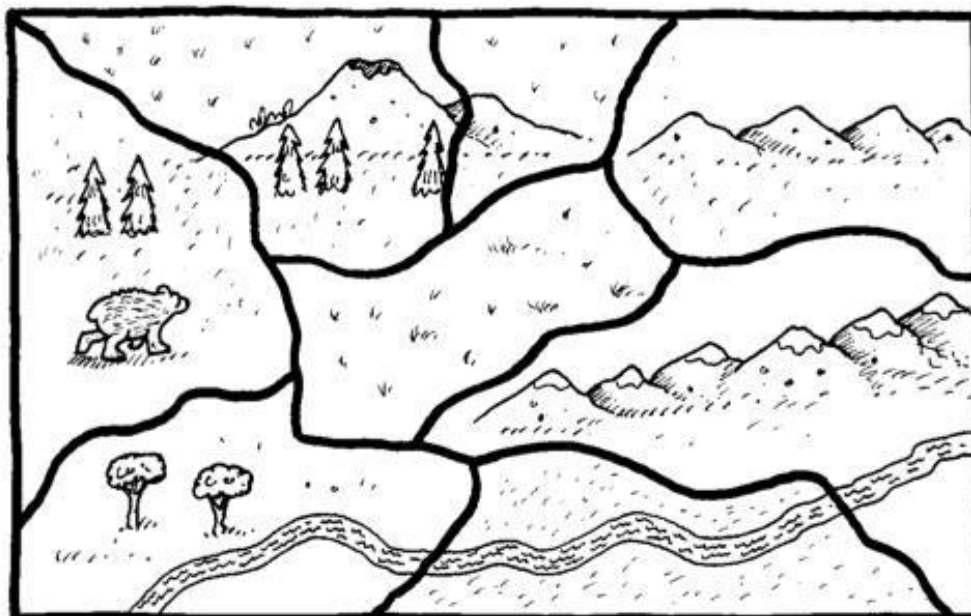
Valstybės, turinčios bendrą sieną, negali būti spalvinamos tokia pat spalva.



Antrasis darbo lapas. Grafo spalvinimas

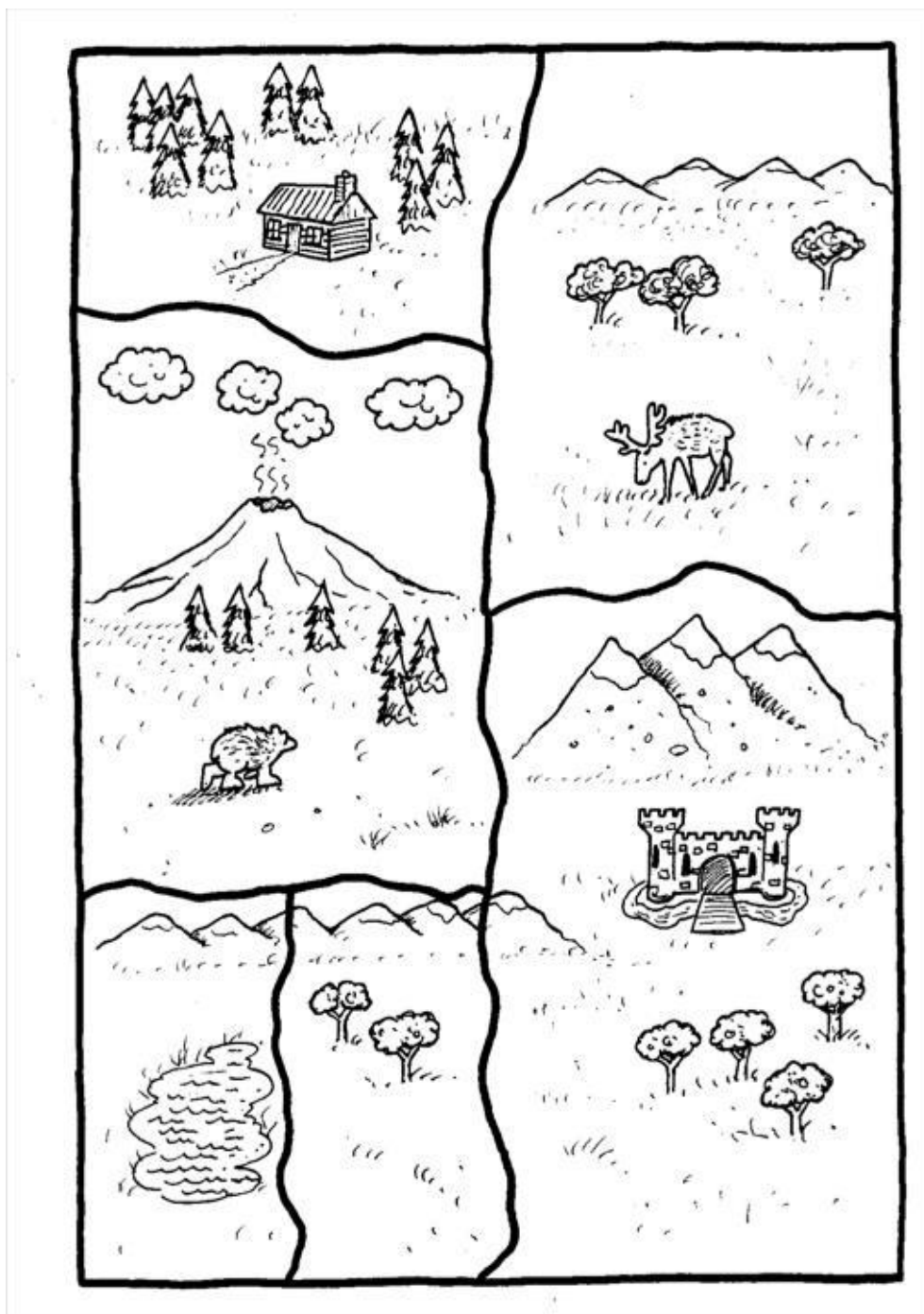
Nuspalvinkite valstybes šiuose žemėlapiuose naudodami kuo mažiau spalvų.

Valstybės, turinčios bendrą sieną, negali būti spalvinamos tokia pat spalva.



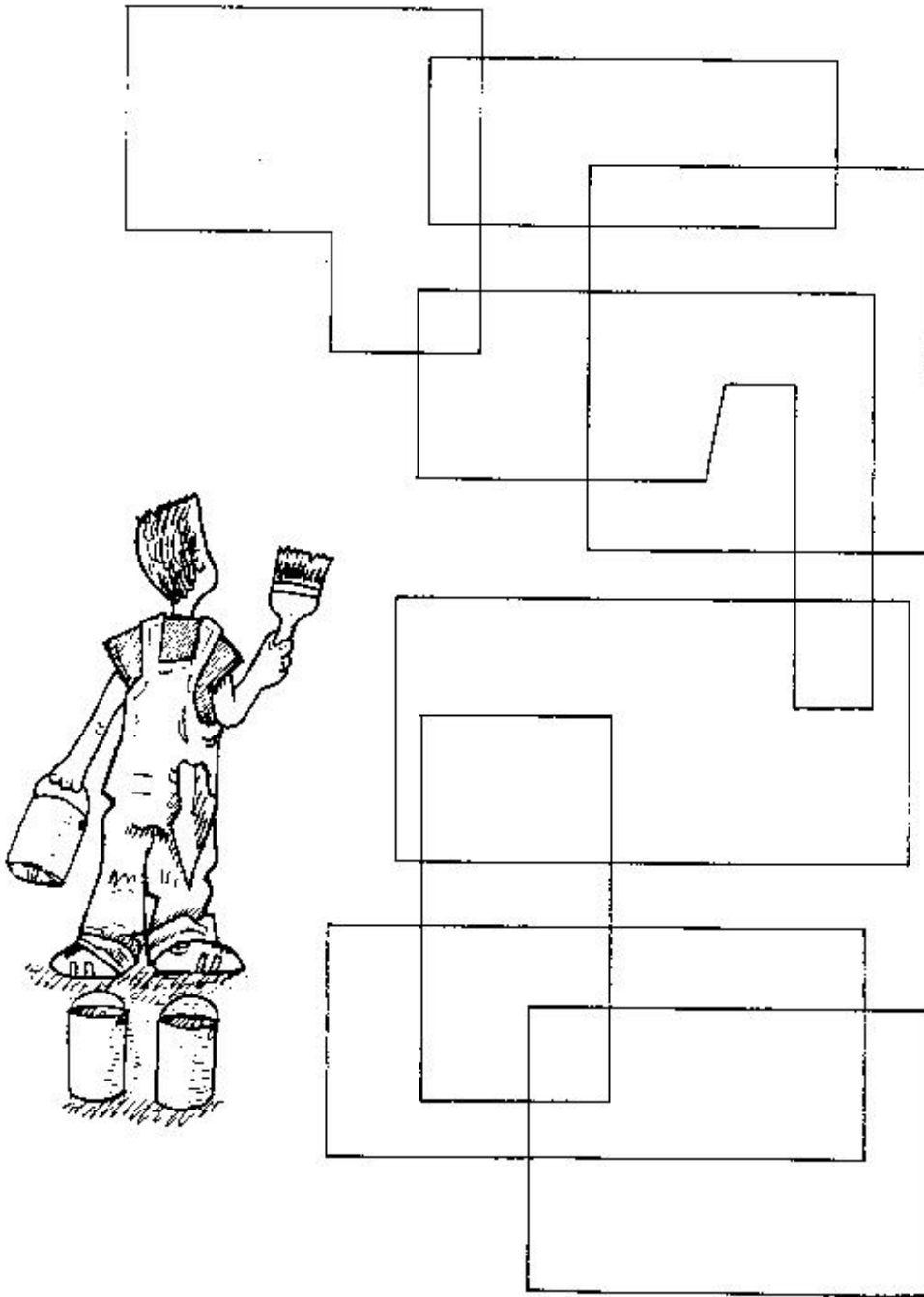
Trečiasis darbo lapas. Grafo spalvinimas

Nuspalvinkite valstybes šiame žemėlapyje naudodami kuo mažiau spalvų. Valstybės, turinčios bendrą sieną, negali būti spalvinamos tokia pat spalva.



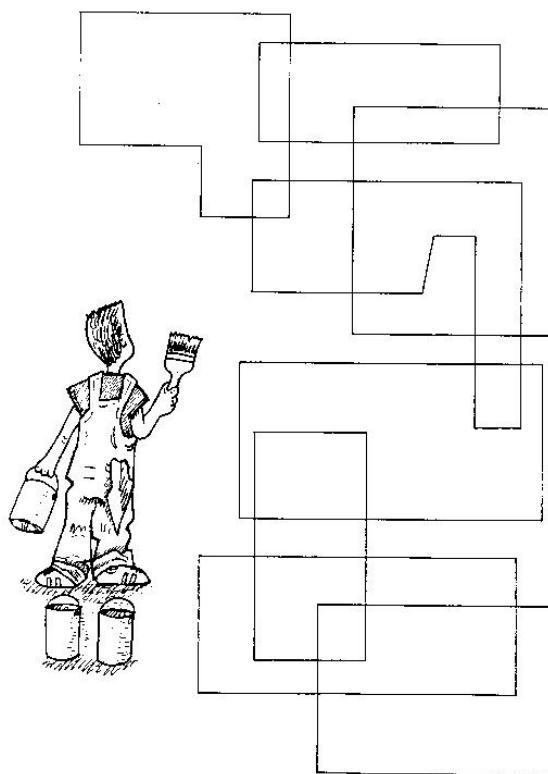
Ketvirtasis darbo lapas. *Grafo spalvinimas*

Nuspalvinkite sritis šioje schemoje naudodami kuo mažiau spalvų. Sritis, turinčios bendrą ribą, negali būti spalvinamos tokia pat spalva.



Sudėtingesni grafo spalvinimo uždaviniai

Paprasta sukurti žemėlapij, kuriam nuspalvinti tereikia dviejų spalvų. Toks pavyzdys parodytas ketvirtame darbo lape, kur schema yra sudėliota iš persidengiančių uždarytų geometrinių figūrų. Taip sudėliotą schemą ar žemėlapij visada bus galima nuspalvinti naudojant tik dvi spalvas. Užduotis mokiniams būtų sukurti ir patikrinti keletą tokių žemėlapių. Tada reikėtų klausti, kodėl taip yra, kokiomis savybėmis turi pasižymėti žemėlapis (grafas), kad būtų galima nuspalvinti naudojant tik dvi spalvas. Būtina išklausti kiekvieną mokinį. Mokiniai patys turi spręsti, ar pateikti argumentai yra įtikinantys, ar jų pakanka.



Žemėlapiui, nupieštam ant lapo ar sferos (gaublio), visada užtenka keturių spalvų. Mokslininkams įdomu, kiek spalvų reikia žemėlapiui, kuris nupieštas ant kitokio paviršiaus, pavyzdžiui, toro. Šiuo atveju visada pakanka penkių spalvų.

Supažindinkite mokinius su toro figūra, aptarkite ir pasiūlykite išbandyti žemėlapių spalvinimą ant toro paviršiaus.

Įdomios grafo spalvinimo uždavinių interpretacijos

Grafų teorijoje yra įvairių grafo spalvinimo uždavinių interpretacijų. Pavyzdžiui, jei vienas žmogus spalvina žemėlapi, nubraižytą ant lapo, tai tikrai žino, kad protingai spalvinant užtenka keturių spalvų. O jei tas žmogus spalvintų valstybes paeiliui ne vienas, o su priešiška nusiteikusi ar grafo spalvinimo teorijos nežinančiu partneriu? Vienas spalvina viską gerai apgalvodamas, o kitas neapdairiai spalvina valstybes paeiliui.

Kiek mažiausiai skirtingų spalvų reikėtų žemėlapiui nuspalvinti?

Didžiausias skaičius nėra žinomas. 1992 m. buvo įrodyta, kad 33 skirtingų spalvų visada pakaktų. 2008 m. buvo įrodyta, kad visada pakaktų 17 skirtingų spalvų. Ekspertai spėja, kad turėtų užtekti 10 skirtingų spalvų, bet tai nėra įrodyta.

Išbandykite šį metodą spalvindami kurį nors iš žemėlapių poromis.

Kita grafo spalvinimo uždavinio interpretacija yra *imperijos spalvinimas*. Šiai interpretacijai reikia dviejų skirtingų, bet vienodą skaičių valstybių turinčių žemėlapių. Kiekviena valstybė viename žemėlapyje (Žemės) turi atitikti valstybę kitame žemėlapyje (pavyzdžiui, Žemės valstybės kolonijų Marse).

Spalvinant šiuos žemėlapius keliamos dvi sąlygos: valstybės, turinčios bendrą sieną, negali būti tokios pat spalvos ir kiekviena valstybė viename žemėlapyje turi būti nuspalvinta tokia pat spalva kaip ją atitinkanti valstybė kitame žemėlapyje.

Kiek mažiausiai skirtingų spalvų reikia šiems žemėlapiams nuspalvinti?

Deja, atsakymas dar nežinomas.

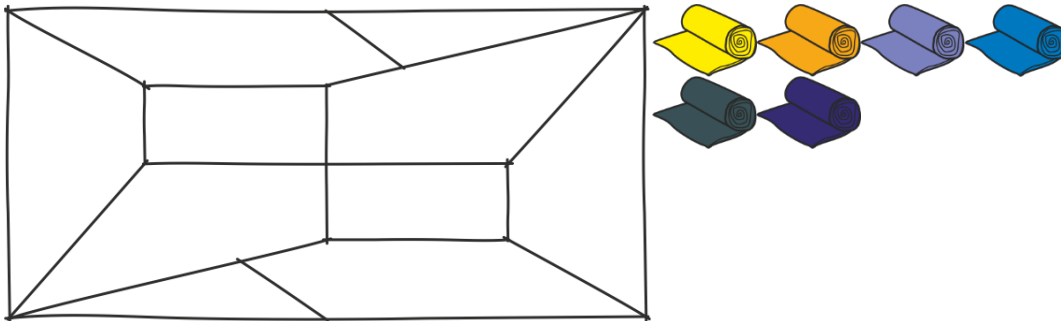
Dar keletas grafo spalvinimo pavyzdžių:

„Bebro“ konkurso uždaviniai

Panagrinėkite porą uždavinių, kurie buvo pateikti ankstesnių metų „Bebro“ konkursuose. Aptarkite, kaip jie susiję su žemėlapiu spalvinimo problema. Kurios klasės mokiniams tinka pateikti uždaviniai?

Skiautinsys

Bebrai iš įvairių spalvų skiaučių nori pasiūti antklodę. Ji turi būti spalvinga, todėl bendrą kraštą turinčios skiautės turi būti skirtingų spalvų. Be to, bebrai nori panaudoti kuo mažiau audinių spalvų. Jie nubraižė, kaip turėtų atrodyti antklodės ornamentai:



Padėk bebrams pasiūti antklodę iš kiek galima mažiau skirtingų spalvų audinių.

Pasirink audinio spalvą ir nuspalvink antklodę.

Tai informatika!

Spalvinimas priklauso grafo uždaviniams. Grafe spalvinimo uždavinys formuluojamas taip: reikalaujama, kad duotos viršūnės būtų sujungtos skirtingų spalvų linijomis. Reikia surasti mažiausių skaičių skirtingų spalvų linijų grafui nuspalvinti.

Šis uždavinys atitinka žemėlapių spalvinimo uždavinį.

Daugiau skaitykite čia:

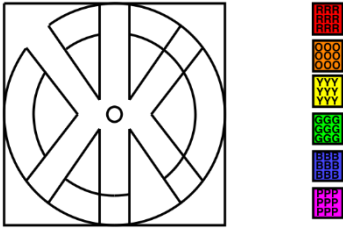
https://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem

https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_coloring

Sudėtingos figūros spalvinimas

Pateiktą figūrą reikia nuspalvinti naudojant kuo mažiau spalvų. Tačiau neleidžiama ta pačia spalva spalvinti jokių dviejų bendrą kraštinę turinčių sričių.

Kiek mažiausiai spalvų prireiks?



Atsakymo variantai:

- 2
- 3
- 4
- 5
- 6

Tai informatika!

Ši užduotis – tai gerai žinomas matematikos uždavinys, vadinamoji keturių spalvų teorema. Ši teorema teigia, kad bet koks plokštuminis paveikslas, padalintas į sritis, pavyzdžiui, žemėlapis, gali būti nuspalvintas naudojant ne daugiau kaip keturias spalvas ir laikantis taisyklės, kad jokios dvi bendrą kraštinę turinčios sritys negali būti nuspalvintos ta pačia spalva.

Keturių spalvų teorema turi daug taikymų informatikoje. Pavyzdžiui, planuojant skrydžius ir skirstant pakilimo ir nusileidimo takus, kad būtų išvengta susidūrimų, parenkant mobiliųjų tinklų dažnius.

Daugiau skaitykite:

https://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem

Daugiau informacijos

Siūlome paskaityti puikų matematiko Viliaus Stakėno straipsnį, spausdintą „Alfa ir omega“ žurnale.

Paskaitykite straipsnio ištrauką ir aptarkite, ką naujo sužinojote. Pažiūrėkite į Lietuvos administracinį suskirstymą: ar galime jam pritaikyti „trikampių“ plotų taisyklę?

Žemėlapių spalvinimo uždavinį galime pakeisti jo kelių grafo spalvinimo uždaviniu: jei šio grafo viršūnes galėtume nuspalvinti taip, kad kiekvienas kelias (grafo briauna) jungtų skirtingai nuspalvintas viršūnes (sostines), tai ir patį žemėlapią galėtume taisyklingai nuspalvinti. Išties pakaktų visą šalį nuspalvinti jos sostinės spalva.

Įsižiūrėkime į žemėlapią ir jo šalių sostines jungiančių kelių tinklą. Šis tinklas taip pat yra žemėlapis. Pastebėkime tokius paprastus dalykus: jei a yra šalies A sostinė, tai kelių grafo a viršūnės laipsnis lygus šalies A sienų skaičiui.

Jei žemėlapis yra normalusis, tai jo kelių žemėlapyje kiekviena šalis turi tris sienas. Taigi kelių žemėlapis sudarytas iš „trikampių“!

Pasirinkę kurią nors kelių žemėlapių šalį, galime pažymėti jos viršūnes skaitmenimis 0 (geltona), 1 (žalia), 2 (raudona). Gretimų šalių viršūnes irgi pažymėkime tais pačiais simboliais, tačiau taip, kad kiekviena briauna jungtų skirtingai pažymėtas viršūnes. Jeigu tęsiant šį procesą pavyktų visas kelių grafo viršūnes pažymėti skaitmenimis 0, 1, 2 taip, kad kiekviena briauna jungtų viršūnes, kurių skaičiai (spalvos) skirtingi, tai kelių grafa galėtume taisyklingai nuspalvinti trimis spalvomis. Tačiau tada ir pradiniam žemėlapiui taisyklingai nuspalvinti užtektų trijų spalvų!

Kada trisienių šalių žemėlapių viršūnes galime šitaip žymėti? Atsakymas, pasirodo, paprastas — kai to žemėlapių šalis galima taisyklingai nuspalvinti dviem spalvomis (tarkime, juoda ir balta)! Jeigu žemėlapis nuspalvintas — galima tiesiog keliauti juodųjų šalių sienomis apeinant šalį po šalies ir žymėti viršūnes. Žinoma, tai reiktų dar įrodyti, bet tai padaryti nėra sunku.

Dar viena įdomi ištrauka iš šio straipsnio:

Normalųjį žemėlapiį galima taisyklingai nuspalvinti trimis spalvomis tada ir tik tada, kai visos jo šalys turi po lyginį skaičių sienų.¹

13 pav. Vieną iš šių žemėlapių galima taisyklingai nuspalvinti trimis spalvomis, o kito ne!

Taigi Lietuvos žemėlapiio trimis vėliavos spalvomis nenuspalvinsime. Kliudo, pavyzdžiui, Kelmės arba Ukmergės rajonų padėtis – jie turi po nelyginį skaičių sienų.

Paskaitykite visą V. Stakėno straipsnį, yra daugiau įdomybių:

Vilius Stakėnas. Keturios spalvos – ir pasaulis margas. *Alfa ir omega*, 2000, Nr. 1, p. 36–44.

<http://web.vu.lt/mif/v.stakenas/a+o/2000-1/2000-1-36-44.pdf>

„Youtube“ galite rasti daug vaizdo įrašų apie keturių spalvų teoremą ir įdomių uždavinių.

Vieną rekomenduojame:

<https://www.youtube.com/watch?v=052VkJhlaQ4> (Graph coloring)

David Harel knygoje „Algorithmics“ nagrinėjama keturių spalvų teorema, pateikiama jos istorija.

Daugiau žemėlapiio spalvinimo aspektų aptariama knygoje „The Spirit of Computing“ (Addison–Wesley, Reading, MA, 1st edition, 1987; 2nd edition, 1992; 3rd edition (with Y. Feldman), 2004).

Dar viena įdomi knyga:

Nancy Casey, Mike Fellows. *This is MEGA–Mathematics!*, Los Alamos National Labs, 1992.

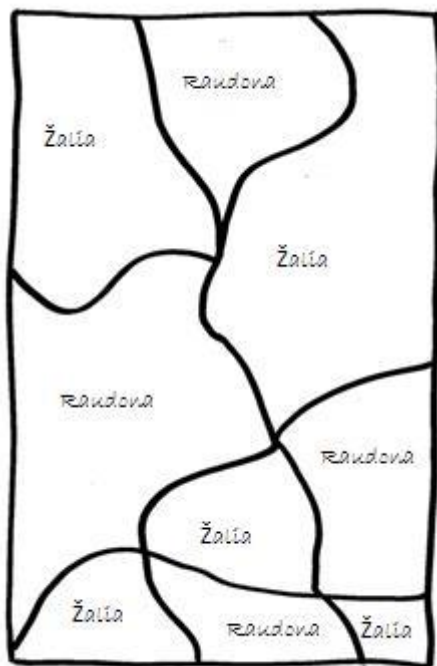
Marek Kubale knygoje „Graph Colorings“ aprašoma grafo spalvinimo uždavinių istorija (American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2004).

Sprendimai ir užuominos

Darbo lapų atsakymai

Vienintelis pirmojo darbo lapo sprendimas parodytas A paveiksle (spalvos gali būti pasirenkamos).

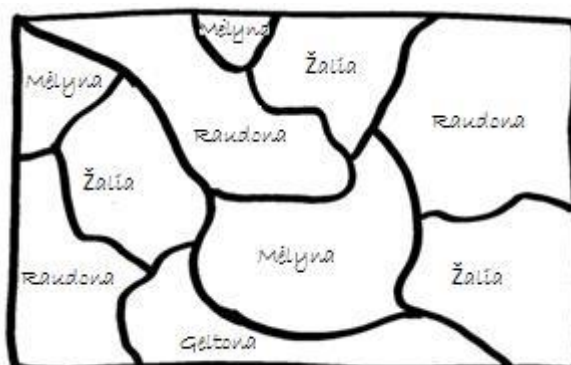
Antrojo darbo lapo viršutiniam žemėlapiui reikia trijų spalvų. Galimas sprendimas parodytas B paveiksle. Apatiniam žemėlapiui jau reikia keturių spalvų. Galimas sprendimas parodytas C paveiksle.



A.



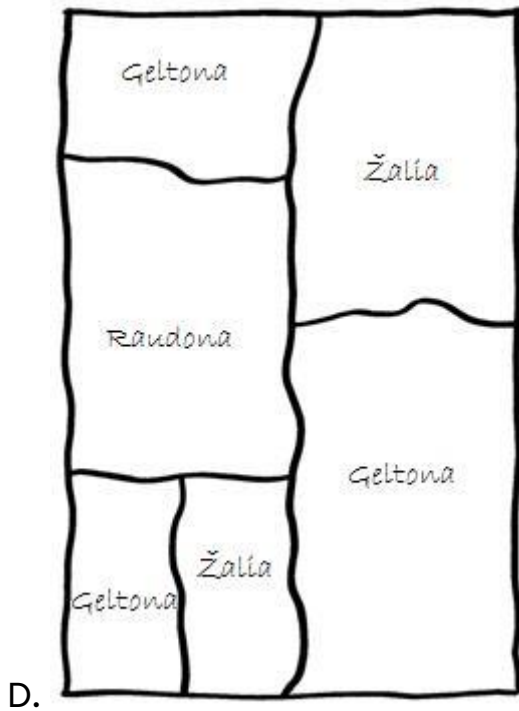
B.



C.

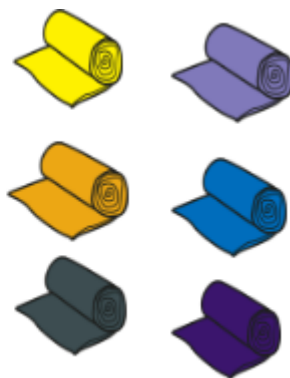
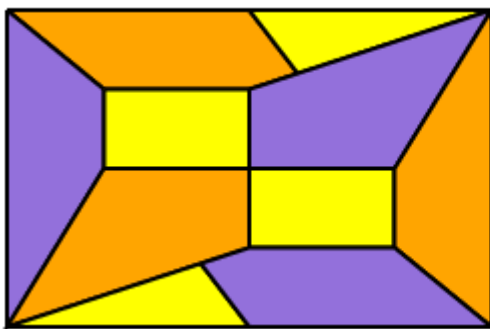
Trečiojo darbo lapo žemėlapiui reikia trijų spalvų. Galimas sprendimas parodytas D paveiksle.

Ketvirtojo darbo lapo sprendimas parodytas E paveiksle (užbrūkšniuotos ir baltos figūros).



Skiautinio atsakymas

Antklodė gali būti pasiūta iš trijų skirtingų spalvų audinių. Sprendinį galima rasti derinant spalvas. Neįmanoma antklodės pasiūti iš dviejų spalvų audinio, nes neužtenka dviejų spalvų trims ornamentams, turintiems vieną bendrą viršūnę.



Sudėtingos figūros spalvinimo atsakymas

Atsakymas: 3 spalvos

Galimi įvairūs spalvinimo būdai priklausomai nuo to, kokia spalva pradedama spalvinti ir kuri sritis pirmiausia pasirenkama spalvinti. Pateikiamas sprendimas, kai pasirenkama pirmoji spalva ir stengiamasi nuspalvinti kiek galima daugiau sričių, pradedant nuo viršutinio kairiojo kampo:



Antrąją spalvą spalvinama, pradedant nuo apatinio kairiojo kampo:



Paėmę trečiąją spalvą, matome, kad galime nuspalvinti visas likusias sritis ir dvi bendrą kraštinę turinčios sritis nebus tos pačios spalvos:



Tai rodo, kad trijų spalvų pakanka. Toliau reikia įsitikinti, kad negalime nuspalvinti šio paveikslėlio naudodami mažiau nei tris spalvas. Įmkime x pažymėtą geltoną sritį: ji turi bendrą kraštinių su dviem sritimis, taigi turime tris sritis ir visos jos turi būti skirtingų spalvų. Vadinasi, neįmanoma šio paveikslėlio nuspalvinti, naudojant mažiau nei tris spalvas.

